

CAPITULO PRIMERO

EL CALCULO CON LOS NUMEROS NATURALES

Es natural empezar por el *fundamento de toda la Aritmética*, el cálculo con los números enteros y positivos, y como haremos siempre en el curso de estas lecciones, examinaremos la cuestión siguiente: ¿Cómo deben enseñarse estas cosas en la Escuela?, y después ampliaremos nuestra investigación examinando la cuestión desde un punto de vista más elevado para ver cuanto en ella se encierra.

I. Introducción de los números en la Escuela

En este punto me limitaré a breves indicaciones que cada uno podrá completar con el recuerdo de cómo aprendió a calcular en la Escuela. Claro es que, en cuanto diga, no es mi propósito guiar en la práctica de la enseñanza, como se hace en los Seminarios de las Escuelas superiores, sino que me limito a acopiar el material que ha de servir para orientación de nuestra crítica.

Las propiedades de los números enteros y el cálculo con los mismos son cuestiones tales, que el lograr hacerlas comprensibles a los niños de modo que éstos lleguen a dominarlas por completo es un problema extremadamente difícil, el cual exige la labor de varios años, desde los primeros de la escuela hasta las clases sexta y quinta de los gimnasios.

El método que hoy se sigue generalmente entre nosotros para estas cuestiones quizá quede completamente caracterizado por los calificativos de *intuitivo* y *genético*; es decir, que todo el edificio de la enseñanza se construye tomando como base cosas conocidas por los sentidos, elevándose después poco a poco; y en esto radica su diferencia esencial con el método lógico y sistemático que predomina en la enseñanza superior.

Toda la enseñanza relativa a los números enteros viene a distribuirse en forma parecida a la siguiente, en la que sin duda no se encontrará unidad ni precisión: Todo el primer año está ocupado por el cálculo con los números desde 1 hasta 20, dedicando el primer semestre, aproximadamente, a los números desde 1 hasta 10. Los números aparecen como símbolos numéricos de puntos o de conjuntos de las cosas familiares a los niños, sin ningún género de explicaciones. La adición y multiplicación se deducen después intuitivamente. En el segundo grado, se manejan los números desde 1 hasta 100, introduciendo ya el uso de las cifras arábigas con valor relativo y el sistema decimal. Digamos de paso que la denominación de cifras arábigas, como muchas otras de la ciencia, no es justa; históricamente, este sistema de numeración escrita procede *de los indios* y no de los árabes.

Otro de los fines de este grado es llegar al conocimiento de la *tabla de multiplicar*. Cuánto es 5×7 ó 3×8 , por ejemplo, debe saberse hasta durmiendo, para lo cual tiene que aprenderse de memoria la tabla de multiplicar, a lo que naturalmente se llega después de haber puesto muchos ejemplos con objetos.

A este fin sirve excelentemente la bien conocida *máquina de calcular*, y mejor, aunque más modestamente, el llamado *tablero de cálculo*, que consta de un bastidor de diez alambres fijos y paralelos, sobre cada uno de los cuales pueden correr libremente diez bolas; por un corrimiento conveniente, se asocian de tal modo que se ve en seguida el resultado de la multiplicación y su escritura decimal.

El tercer grado, por último, se ocupa en el *cálculo con números de varias cifras*, basado en las conocidas reglas de las operaciones fundamentales, cuya generalidad parece evidente al alumno o debe parecérselo. Claro es que, aun no teniendo esta evidencia, los niños pueden llegar a dominar completamente estas reglas; en todo caso, debe el maestro hacer uso de toda su autoridad, llegando hasta el clásico: «Esto es así, y si no lo sabes verás lo que te pasa.»

Todavía conviene señalar otro aspecto de esta enseñanza, precisamente porque se acostumbra descuidar en la enseñanza superior; y es el hacer resaltar las aplicaciones del cálculo a la vida práctica. Desde el principio, los números se introducen con

ejemplos concretos de la vida corriente; así aprende el niño pronto a calcular con monedas, pesos, masas, etc., y la pregunta tan importante en la vida diaria: ¿Cuánto vale esto? es el eje en torno del cual gira gran parte de la enseñanza.

Siguiendo la marcha progresiva de ésta, se llega después a los llamados «problemas de conjunto», para los cuales, ya es preciso agregar algunas explicaciones al cálculo; estos problemas conducen a la *regla de tres*, la de *aligación*, etc. A las palabras *intuitivo* y *genético*, con las que antes hemos caracterizado esta enseñanza, podemos añadir ahora otras, como tercera característica, las de *aplicaciones prácticas*.

Si, para terminar, queremos condensar en breves palabras el *fin de la enseñanza del cálculo*, diremos: *persigue una seguridad, libre de toda vacilación, en el manejo de las reglas del cálculo procurando un desarrollo paralelo de las diferentes facultades del espíritu que en ello intervienen, sin que merezcan una expresa atención las que hacen referencia a las relaciones lógicas de los números con que se opera.*

Al llegar a este punto, he de llamar la atención acerca de algo que, muy a menudo, desempeña en la Escuela un papel fatal, a saber: la oposición entre los profesores que proceden de los Seminarios (1) y los que llegan de la Universidad o centros análogos.

En la Quinta o después aparece en la enseñanza del cálculo, en lugar del profesor formado en el Seminario, el universitario, resultando con ello frecuentemente para el discípulo una lamentable discontinuidad.

Los pobres jóvenes se ven de pronto obligados a servirse de nuevas expresiones completamente diferentes de las que hasta entonces habían aprendido, y cuyo uso se les prohíbe ahora severamente. Un pequeño ejemplo de esto son los diferentes signos de la multiplicación: el \times que los maestros elementales emplean con preferencia al punto \cdot de los académicos. Estas divergencias podrían fácilmente allanarse, si los universitarios se preocupasen más de los maestros y procuraran ponerse de acuerdo con ellos.

(1) Al decir esto nos referimos a los «Seminarios» (en España, Escuelas normales) para la formación de los maestros de instrucción primaria, establecimientos que nada tienen que ver con los Seminarios de las Universidades y demás centros de enseñanza superior.

Basta que consideremos un poco el grande y metódico esfuerzo que supone la tarea de inculcar en las mentes de cientos de miles de niños que nada saben las nociones del cálculo, para que nos invada un sentimiento de respecto y aprecio a los meritísimos servicios de los maestros. Si intentáramos nosotros mismos ésto, con toda nuestra formación académica, ¡qué pocos éxitos podríamos apuntarnos!

Sigamos adelante, después de esta digresión, y notemos ante todo que desde la Cuarta y aun a veces desde la Tercia el cálculo comienza ya a vestirse con el *elegante atavío de la Matemática*, del cual es primera muestra el cálculo literal. Se designan por a, b, c, \dots o también por x, y, z, \dots números naturales cualesquiera, que al principio siempre son enteros y positivos, y se ejecutan las reglas y operaciones del cálculo con estos números simbolizados por letras, con lo cual se elimina ya el contenido concreto e intuitivo de los números. Se da, así, un *gran paso en el camino de la abstracción*, pues puede decirse, con razón, que *la Matemática propiamente tal empieza con el cálculo literal*. Claro es que este paso no puede realizarse súbitamente en la escuela, sino que el alumno tiene que ir acostumbrándose poco a poco a tan gran abstracción.

Para esta enseñanza parece absolutamente necesario que el maestro conozca con toda exactitud las *leyes lógicas y los fundamentos del cálculo y de la teoría de los números enteros*; aun cuando, naturalmente, no haya de exponerlo inmediatamente al discípulo. Detengámonos en este punto para examinarlo más detalladamente.

II. Leyes formales del cálculo

Históricamente, durante mucho tiempo, se ha sumado y multiplicado sin darse cuenta de las leyes formales de estas operaciones. *En los años del 20 al 30 del siglo pasado*, fueron puestas en evidencia, por primera vez, por *matemáticos ingleses y franceses*, principalmente, las propiedades formales de aquellas operaciones. El lector que desee informarse circunstanciadamente de este asunto, puede acudir como para otras muchas cosas, a la gran *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Eins-*

chluss ihrer Anwendungen (1); así como también la traducción francesa revisada y anotada: *Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées* (2), la cual aparece, en parte, como una segunda edición de la primera pero más completa; esta obra, como de Matemática general, debiera figurar en toda biblioteca escolar, pues su consulta permite al profesor matemático orientar su actividad en la dirección que le interese. Para nosotros, en el punto que nos ocupa, es del mayor interés el primer artículo del primer tomo de la precitada enciclopedia alemana: *H. Schubert, Grundlagen der Arithmetik* (3); cuya refundición francesa, muy completa, débese a *Jules Tannery* y *Jules Molk*.

Volviendo a nuestra cuestión, enumeraremos las *cinco leyes fundamentales* a que conduce la adición:

1.º $a+b$ es siempre un número, es decir, la adición es practicable sin ninguna restricción (en contraposición con la sustracción, que no lo es siempre en el campo de los números naturales).

2.º $a+b$ está determinado **unívocamente**.

3.º Se cumple la ley **asociativa**:

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

así que los paréntesis pueden omitirse en esta operación.

4.º Se cumple la ley **conmutativa**:

$$a+b=b+a$$

5.º Se cumple la ley de **monotonía**: Si

$$b>c$$

es

$$a+b>a+c.$$

(1) Leipzig, Teubner, de 1898 en adelante. Actualmente, se ha terminado la publicación de algunos tomos y está muy adelantada la de otros.

(2) París (Gauthier-Villars) y Leipzig (Teubner), desde 1904. De esta traducción han aparecido hasta ahora menos volúmenes que de la alemana, siendo de temer que la situación creada por la guerra europea suspenda o, al menos, retrase mucho la terminación de obra tan importante.

(3) *Arithmetik und Algebra*, redactado por W. Fr. Meyer (1896-1904). Ed. francesa, red. por J. Molk.

Estas propiedades son claras en sí mismas, cuando se tiene en cuenta el contenido concreto de los símbolos numéricos; pero deben ser abstraídas formalmente para poder fundamentar lógicamente los desarrollos sucesivos.

En lo que respecta a la *multiplicación*, se verifican, desde luego, las *cinco leyes análogas*:

1.º $a + a$ es siempre un número.

2.º ab está determinado **unívocamente**.

3.º *Ley asociativa*:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) c = a \cdot b \cdot c.$$

4.º *Ley conmutativa*:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

5.º *Ley de monotonía*: Si

$$b > c$$

es

$$ab > ac.$$

Su enlace con la adición da, por último, una nueva ley.

6.º *Ley distributiva*:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Se comprende fácilmente que todo el cálculo se puede fundar sobre estas once leyes. Nos conformaremos con un ejemplo sencillo, la multiplicación de 12 por 7. Se tiene, según la ley distributiva,

$$7 \cdot 12 = 7 \cdot (10 + 2) = 70 + 14$$

y si descomponemos 14 en $10 + 4$ (*llevamos las decenas*), utilizando la ley asociativa de la adición:

$$= 70 + (10 + 4) = (70 + 10) + 4 = 80 + 4 = 84.$$

Simplemente con esta consideración se ve ya todo el proceso del conocido procedimiento de multiplicar en el sistema decimal.

Pudieran ponerse ejemplos más complicados, y cada uno debe hacerlo resolviéndolos por sí mismo. Sintetizando los resultados diremos: *las reglas ordinarias de la adición y de la multiplicación constituyen una constante aplicación de las mencionadas once leyes formales a los resultados de las tablas de sumar y multiplicar que están grabados en nuestra memoria.*

En cuanto a la ley de monotonía, ¿dónde podemos hallar su aplicación? En los cálculos formales corrientes no aparece nunca; pero sí en otra clase de cuestiones. Basta recordar aquí lo que se llama, en el sistema decimal, *la multiplicación y división abreviadas*. Esta es una cuestión de gran importancia práctica, la cual, por desgracia, tanto en la Escuela como entre los estudiantes universitarios, no es suficientemente conocida todavía, aunque en la clase Quinta sea explicada incidentalmente.

Pongamos, de nuevo, un ejemplo: Supongamos que tenemos que calcular el producto de 567×134 , y en ambos factores, obtenidos como medidas físicas, la cifra de las unidades no está dada exactamente. Sería, entonces, un trabajo inútil calcular el producto exacto tomando ambos factores con todas sus cifras, puesto que no se podría garantizar su exactitud; sin embargo, podrá interesar conocer cuál es la última cifra exacta de dicho producto; es decir, saber, por ejemplo, entre qué decenas o qué centenas se halla su valor exacto. Esta cuestión nos la resuelve inmediatamente la ley de monotonía; pues, en efecto, de ella se sigue que el número buscado se encuentra entre 560×134 y 570×134 , o entre 560×130 y 570×140 . Dejo a ustedes que terminen el razonamiento y verán que, en todo caso, *la ley de monotonía es de una aplicación constante en el cálculo abreviado.*

En lo que concierne a la *enseñanza propiamente escolar*, repetamos que, naturalmente, no se puede hacer una exposición sistemática de todas estas leyes formales de la adición y de la multiplicación. Cuando el alumno lo haya comprendido bien y esté familiarizado con el cálculo numérico, deberá el maestro aprovechar la ocasión del paso al cálculo literal para inducir, por lo menos, las leyes asociativa, conmutativa y distributiva, por medio de evidentes y numerosos ejemplos numéricos que le permitan enunciarlas de modo explícito.

III. Los fundamentos lógicos de los números enteros

Aunque en la enseñanza primaria no se pueda llegar muy arriba en las difíciles cuestiones que comprende el epígrafe de este artículo, se presenta ya allí el *problema matemático del día*: ¿Cómo deben establecerse estas leyes llamadas fundamentales, y cómo se debe fundamentar, ante todo, el concepto de número?

Trataré de dar a ustedes una orientación en estos problemas, fiel a la idea directora de este curso, que no es otra que examinar nuevamente las materias propias de la enseñanza escolar considerándolas desde un punto de vista elevado, cosa que hago con tanto más gusto, cuanto que estas modernas ideas han llegado a ustedes por todas partes durante sus estudios universitarios, pero sin que se les haya dicho nunca lo preciso acerca del valor psicológico que encierran.

En lo que toca al mismo *concepto de número*, su origen es extremadamente difícil de descubrir, hasta el punto de que se experimenta una sensación de bienestar cuando se deja de lado su investigación. El que por ello se interese puede informarse más detenidamente sobre estas cuestiones, tan vivamente discutidas por los filósofos de todos los tiempos, consultando el ya citado artículo de la Enciclopedia francesa; nosotros nos limitaremos a algunas, muy pocas, observaciones.

Es una idea muy extendida la que supone el concepto de número estrechamente unido al de *tiempo*, dependiendo ambos juntamente de la impresión que despierta en nosotros la sucesión de los fenómenos que a nuestro alrededor y en nosotros mismos se verifican.

Kant, entre los filósofos, y Hamilton, entre los matemáticos, son los representantes de esta interpretación. Otros, en cambio, opinan que el número tiene más que ver con el concepto de espacio, reduciendo el concepto de número a la simultánea contemplación de diferentes objetos considerados en su conjunto. Por último, hay quienes ven en las representaciones de los números las expresiones de una especial aptitud del espíritu, la cual es independiente de toda intuición de espacio y de tiempo. Esta interpretación está bien caracterizada por la siguiente cita del *Fausto* de Goethe que el profesor Minkowski aplica a los números en el lema de su libro sobre *Aproximaciones Diofánticas*:

«Diosas, reinan augustas en la soledad,
Para ellas no hay lugar y menos tiempo.

.....

Mientras este problema se roza sobre todo con cuestiones de Metafísica y de Psicología, se trata principalmente, en el más vasto de fundamentar nuestras once leyes formales, de un problema de Lógica.

Vamos a exponer aquí cuatro diferentes modos de ver relativos a las mismas :

1) Según el primero, que puede considerarse representado por Kant, estas leyes son resultados necesarios, inmediatos de la intuición ; consecuencia de lo cual es que la Matemática no puede fundarse sobre hechos comprobables por la experimentación del mundo exterior. Un ejemplo sencillo que aclare esto : la ley conmutativa de la multiplicación se fundamenta por la observación de la adjunta figura.



Figura 1

Si contamos los puntos por filas, como hay dos filas de 3 puntos cada una, resulta 3×2 ; si los contamos por columnas, se ve que hay 2×3 ; luego $2 \times 3 = 3 \times 2$.

Podría pensarse, que para números bastante grandes no bastará esta inmediata intuición para llegar a la ley ; pero entonces se acude al llamado *principio de la inducción completa* : Si una proposición es cierta para números pequeños, y de su validez para un número cualquiera n se sigue su certeza para $n+1$, la proposición es cierta para todos los números. Este principio, cuyo origen es puramente intuitivo, rompe, en efecto, las barreras ante las que se detiene la intuición concreta. Este es también, poco más o menos, el punto de vista de Poincaré en sus conocidos escritos filosóficos.

Si queremos darnos cuenta de la significación de esta cuestión en lo que se refiere al establecimiento de las once leyes formales hemos de considerar que la Aritmética, y en último término toda la Matemática, se apoya en ellas, y, por consiguiente, no es aventurado afirmar que admitida esta teoría para las reglas del cálculo, *la seguridad de todo el edificio matemático se basa exclusivamente sobre la intuición, en el más amplio sentido de esta palabra.*

2) En segundo lugar es digna de mención una *modificación de este primer punto de vista*, que consiste en descomponer dichas

once leyes fundamentales en un mayor número de pequeños pasos y tomar los más sencillos de éstos directamente de la intuición, y deducir de ellos todos los demás por vía puramente lógica sin apelar nuevamente, en ningún momento, a la intuición.

Aun cuando la posibilidad de un procedimiento puramente lógico, sólo comienza *después* de establecer aquellas once leyes, puede ya empezar *antes*, en cuanto se sientan las proposiciones más simples en que pueden descomponerse dichas leyes, resultando, por lo tanto, que *el límite de separación entre la intuición y la lógica se ha trasladado en favor de esta última.*

Iniciador de esta tendencia fué *Hermann Grassmann* en su *Lehrbuch der Arithmetik*, publicado en 1861 (1).

Como ejemplo de este modo de proceder puede mencionarse que la ley conmutativa se deduce de la asociativa aplicando el método de inducción completa.

Al lado de la Aritmética de Grassmann merece citarse por la precisión de su exposición la del italiano Peano: *Aritmetices principia nova methodo exposita* (2), libro que no está escrito en latín, aunque así pudiera colegirse del título.

Aparece escrito en un lenguaje simbólico, característico de su autor, que permite hacer resaltar cada fase del razonamiento desterrando el uso de las palabras corrientes que pudieran enerrar alguna idea derivada de la intuición y evitando así todo equívoco posible. Téngase presente que Peano es *cabeza de una escuela muy extendida en Italia*, la cual quiere descomponer las premisas de toda disciplina matemática y, con el recurso de un exacto lenguaje de *conceptos escritos*, intenta investigar sobre sus lógicas conexiones.

3) Nos toca ahora mencionar una *moderna concepción de estas ideas*, de la que ya está influida la de Peano; me refiero al modo de tratar los fundamentos de la teoría de los números que supone el *concepto de conjunto*.

La idea general de conjunto—de su vasto alcance podrán ustedes hacerse idea si les digo que son ejemplos particulares de

(1) Con la edición «für höhere Lehranstalten» (Berlín, 1861). Los capítulos que a esto se refieren han sido reproducidos en *H. Grassmanns gesammelte mathematische und physikalische Werke*, editadas por F. Engel (Leipzig, 1904, tomo II 1., págs. 259 a 349).

(2) Augustæ Taurinorum (Torino, 189).

conjuntos, tanto la serie de todos los números enteros como el conjunto de todos los puntos de un segmento—, ha sido objeto de una especulación matemática sistemática por parte de Georg Cantor, de Halle, señaladamente, y la *teoría de conjuntos* creada por él, es cultivada con el mayor interés por la generación de los modernos matemáticos.

Más adelante haremos un rápido examen de esta teoría; baste, por ahora, consignar que la tendencia de esta nueva manera de fundamentar la teoría de los números puede caracterizarse brevemente con estas pocas palabras:

Las propiedades de los números enteros y de las operaciones que con ellos se efectúen pueden reducirse a las propiedades generales de los conjuntos y de las relaciones abstractas que entre ellos existen, llegándose a realizar por este camino una exposición rigurosa sobre el fundamento más general posible.

Como iniciador de esta tendencia debe ser citado también Richard Dedekind, que en una memoria, pequeña en volumen pero rica en ideas, titulada : *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1) fué el primero que dió tal fundamento a la teoría de los números enteros.

Conforme a estas ideas, expone las propiedades de los números enteros H. Weber en la primera parte del tomo primero de la citada enciclopedia Weber-Wellstein; pero, realmente, la exposición es tan abstracta y difícilmente comprensible que el mismo autor, en un apéndice del tomo tercero (2) de la misma obra, ha dado una teoría más elemental, utilizando solamente conjuntos finitos, la cual ha incluido luego en la tercera edición del tomo primero. Su lectura es muy recomendable a cuantos se interesen por estas cuestiones.

4) Por último, existe un modo puramente formal de introducir el número, cuyo origen se remonta a Leibniz y que últimamente ha sido adoptado principalmente por Hilbert. (Véase su conferencia en el Congreso de Heidelberg de 1904: «*Sobre los fundamentos de la Lógica y de la Aritmética*») (3).

(1) Braunschweig, 1888.

(2) *Angewandte Elementarmathematik*. Bearb. von H. Weber, J. Wellstein y R. H. Weber. Leipzig, 1907.

(3) Verhandlungen des 3. internationalen Mathematikerkongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904 (Leipzig, 1905), pág. 174 y sigs.

La idea primordial de esta concepción, es : Suponiendo dadas las once leyes fundamentales del cálculo, se puede operar con las letras a, b, c, \dots que representan números enteros cualesquiera, sin cuidarse de si tienen o no una significación numérica real ; o más claramente expresado : si a, b, c, \dots son cosas sin significación alguna o de cuya significación nada sabemos, y suponemos sólo que pueden ser relacionadas conforme a aquellas once leyes, sin que sea necesario que estas operaciones tengan un significado real conocido, se podrá entonces operar con a, b, c, \dots como se hace ordinariamente con los números reales. La única cuestión que habrá de examinarse en tal caso es ésta : si operando así se podrá llegar alguna vez a resultados contradictorios.

Se dice ordinariamente que la intuición nos muestra la existencia de números para los cuales son válidas las llamadas reglas operatorias, y, por tanto, en ellas no se puede hallar ninguna contradicción ; pero siendo así, cuando se haya prescindido de la significación real de los símbolos numéricos, ya no es admisible acudir a la intuición, y *el problema se ha convertido en este otro : demostrar lógicamente que en ninguna operación con símbolos, hecha conforme a las once leyes fundamentales, se puede llegar a contradicción, o lo que es lo mismo, dichas once leyes son lógicamente compatibles.*

Al exponer el primer punto de vista dijimos que, según él, la certeza de la Matemática se basa en la existencia de cosas intuitivas, para las cuales se verifican sus proposiciones ; en cambio, para el partidario de este segundo modo, puramente formal, de ver la cuestión, *la certeza de la Matemática estriba en que sus leyes fundamentales, consideradas de un modo puramente formal, prescindiendo de todo contenido intuitivo, formen un sistema lógico no contradictorio.*

Para terminar este punto agreguemos algunas observaciones :

a) Hilbert ha formulado, en su conferencia de Heidelberg, estas ideas fundamentales, pero sin llegar a desarrollarlas por completo ; más tarde avanzó algo en el mismo camino en uno de sus cursos, pero después nada ha vuelto a hacer en esta materia ; puede, pues, decirse, que se ha limitado a *presentar un programa.*

b) La tendencia a desligarse de la intuición y a mantenerse siempre en un terreno *puramente* lógico, nos parece impracticable de un modo absoluto. *Un resto, un minimum de intuición, tiene*

que quedar siempre en el fondo; aun cuando se formule de un modo abstracto, siempre va unida una cierta intuición a los símbolos con que se opera, siquiera para poder reconocer estos símbolos y aunque sólo sea pensando en la forma de las letras.

c) Aceptemos, sin embargo, que el problema en cuestión haya quedado satisfactoriamente resuelto y, por consiguiente, demostrada la compatibilidad de las once leyes fundamentales. Aun entonces ocurre una observación, a la que conviene dar toda la importancia que merece, a saber: *la de ser evidente que mediante consideraciones de esta naturaleza no se ha fundamentado, y, más aún, no se puede fundamntar la Aritmética*. Es imposible por vía puramente lógica demostrar que las leyes cuya compatibilidad se ha supuesto sean realmente aplicables a los números que nos son conocidos por la intuición; que los entes indeterminados de que se habla en aquellas leyes puedan ser números reales, y que las relaciones que allí aparecen puedan equivaler a los procesos reales de la adición y de multiplicación en su clara significación intuitiva. Lo que realmente se deduce de aquí es que el problema, grande en su complejidad y aparentemente irresoluble, de *fundamentar la Aritmética, comprende dos partes*, y que la primera, el problema puramente lógico de establecer principios fundamentales o axiomas e investigar su mutua independencia y compatibilidad, es perfectamente abordable. La segunda parte, que pertenece más bien a la teoría del conocimiento representa, en cierto modo, la aplicación de aquellas investigaciones lógicas a las relaciones reales, y apenas si ha sido tomada en consideración, aunque naturalmente debiera abordarse al mismo tiempo que la primera, si realmente se ha de fundamentar la Aritmética con el debido rigor.

Esta segunda parte plantea una cuestión muy honda, cuyas dificultades tienen sus raíces en la teoría del conocimiento. Pudiera, quizá, darse una exacta idea de la naturaleza de este problema mediante esta casi paradójica afirmación: Quien pretenda hacer pasar como *Matemática pura* investigaciones lógicas *puras*, como consecuencia de la segunda parte del problema que nos ocupa, habrá dado a los fundamentos de la Aritmética y, por tanto, a la Aritmética misma, el carácter de *Matemática aplicada*.

Conviene insistir en este asunto, porque sobre él se incurre

frecuentemente en errores e incomprensiones, y aun hay muchos que pasan sencillamente por alto la existencia de este segundo problema. Naturalmente, no es este el caso de Hilbert, pero, cualesquiera que sean las afirmaciones o contradicciones a que lleguen los que prescindan de esta segunda parte del problema, carecerán de valor. El profesor Thomae, de Jena, ha calificado a los que se ocupan casi exclusivamente en investigaciones abstractas y lógicas sobre entes que nada significan y principios que nada dicen, y no solamente no paran su atención en aquel segundo aspecto del problema, sino que, como a menudo ocurre, olvidan todo lo demás de la Matemática, con la feliz denominación de *pensadores sin pensamiento*. Claro es que no se puede aplicar este irónico calificativo a las personalidades que se dedican a estas investigaciones al par que a tantas otras de índole distinta.

En relación con esta ojeada acerca de los fundamentos de la Aritmética, conviene agregar todavía algunas consideraciones generales. Se ha pensado y dicho repetidas veces que la Matemática puede y aun debe enseñarse por un método exclusivamente deductivo; derivando lógicamente todas sus proposiciones de una serie de axiomas previamente establecidos. Este procedimiento, que cuenta en su apoyo la autoridad histórica de Euclides, no corresponde en todo caso al proceso evolutivo de la Matemática. Por el contrario, ésta se ha desarrollado de un modo semejante al árbol, el cual no sólo crece desde las más finas fibrillas de sus raíces hacia arriba, sino que al mismo tiempo que se desarrolla y extiende sus ramas y hojas, sus raíces penetran más y más profundamente en el suelo en que arraiga. De la misma manera, puede decirse que la Matemática surgió a partir del instante en que la inteligencia humana llegó a cierto grado de madurez y ha progresado después, atendiendo a las necesidades de la Ciencia misma y a las exigencias de cada momento, tanto ampliando sus conocimientos, como, en la medida correspondiente, depurando e investigando sus principios. Así, por ejemplo, al examinar lo relativo a los fundamentos de la Aritmética, nos colocamos hoy en un punto de vista muy distinto del de los investigadores de hace pocos decenios; y los que hoy pueden enunciarse como los últimos principios, seguramente quedarán postergados dentro de algún

tiempo, cuando las últimas verdades se vayan analizando con más precisión y reduciendo a ideas más simples y generales. Puede, pues, asegurarse que *tampoco en lo que respecta a la investigación de los principios de la Matemática se ha dicho la última palabra*; y, por consiguiente, *tampoco se puede enunciar el punto de partida preciso que dé un fundamento absoluto a la enseñanza*.

Otra observación quisiera hacer, acerca de la *relación entre la actividad lógica y la intuitiva de la Matemática*, entre lo que se llaman *matemáticas puras y aplicadas*. Ya antes hice notar que en la escuela, desde el principio, acompañan las aplicaciones a la enseñanza del cálculo; de modo que el discípulo no sólo comprende las reglas, sino que con ellas aprende a realizar algo. Así debería ocurrir siempre, de un modo normal, en el cultivo de la Matemática.

Las relaciones puramente lógicas deben quedar, por decirlo así, como el *esqueleto del organismo de la Matemática*; que da a ésta su característica solidez y certeza.

Pero lo vivo de la Matemática, sus más importantes estímulos, su eficacia externa, estriban siempre en sus aplicaciones, es decir, en las correlaciones de aquellos entes puramente lógicos con todos los demás dominios del saber.

Pretender desterrar de la Matemática las aplicaciones, equivaldría a querer concentrar la vida de un animal en su osamenta únicamente, sin parar la atención en sus músculos, nervios y vísceras.

Repetidas veces se realiza en la *investigación científica una división del trabajo* entre la ciencia pura y la aplicada; pero al hacerla debe procurarse que las relaciones entre ambas se conserven para el buen desarrollo de la ciencia; y, en todo caso, y quede aquí claramente dicho, *en la escuela es imposible tal división del trabajo y la consiguiente especialización de cada maestro*. Imagínese una escuela en la cual un maestro sólo tratase de los números como símbolos sin significado concreto; otro, cuyo trabajo consistiera en dar a estos símbolos el significado conveniente para que representen números intuitivos; un tercero, un cuarto, un quinto, etc., que dieran a conocer las aplicaciones a la Geometría, Mecánica, Física, etc., y que cada uno de ellos traba-

jara en completa independencia de los demás. A nadie se le ocurre pensar como posible en tal organización de la enseñanza; ni los alumnos podrían comprender nada, ni los profesores podrían entenderse entre sí. Las propias necesidades de la enseñanza escolar exigen en cada uno de los maestros, un cierto grado de enciclopedismo, una orientación amplia, tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas; lo que lleva consigo el remedio contra el grave mal que significaría un excesivo desmenuzamiento de la ciencia.

Un resultado práctico de estas observaciones es el consignado en los acuerdos del *Congreso de Dresde*, a que ya nos hemos referido. En ellos se recomienda precisamente la Matemática aplicada, que desde 1898 ha sido exigida en los exámenes de maestros en una sección especial, *como elemento necesario a toda formación matemática normal*, de modo que aparezcan siempre combinadas las aptitudes del maestro para las matemáticas puras y aplicadas. Citemos también, a este respecto, que la comisión de enseñanza pública en el llamado «Plan de Meran» (1), establecía estas tres cosas como fin de la enseñanza matemática en la clase de Oberprima (superior):

1.^a Una ojeada científica sobre la construcción sistemática de la Matemática.

2.^a Una cierta facilidad en la resolución completa de problemas numéricos y gráficos.

3.^a Un estudio sobre la significación del pensamiento matemático en las ciencias naturales, y, en general, en la cultura moderna.

Estos tres puntos comprenden todo el programa al que estoy plenamente convencido es preciso ajustarse.

IV. Práctica del cálculo con números enteros

Después de las explicaciones últimas de carácter predominantemente abstracto, vamos a tratar ahora de cosas más concretas, como es la *práctica del cálculo numérico*.

(1) *Reformvorschläge für den math. und naturw. Unterricht*, überreicht der Vers. d. Naturforscher u. Ärzte zu Meran (Leipzig, 1905). Puede también verse en el informe de la Comisión, pág. 93 (citado en la página II), así como en Klein-Schimmack, pág. 208 (cit. en la pág. III).

Como obra apropiada para orientarse en esta cuestión puede citarse, preferentemente, el artículo de la Enciclopedia sobre *Cálculo numérico* de R. Mehmke. (*Encykl.* tomo I, parte 2, F.)

Para dar mejor una idea general de los asuntos que integran esta cuestión basta examinar el contenido de dicho artículo. Consta éste de dos partes, a saber:

A) La teoría del cálculo exacto; B) La teoría del cálculo aproximado.

En A) se comprenden todos los métodos que facilitan el cálculo exacto con números enteros grandes, por ejemplo, las disposiciones más cómodas de los esquemas del cálculo, las tablas de productos y de cuadrados, y, en particular, las máquinas calculatorias en que pronto nos ocuparemos.

En B, por el contrario, se trata de cuanto se refiere al grado de aproximación del resultado, es decir, de los procedimientos con los cuales se obtienen sus primeras cifras exactas; en particular, de las *tablas de logaritmos* y análogas, de la *regla de cálculo*, que, en realidad, es una tabla gráfica de logaritmos dispuesta de un modo especial; y, por último, también de los numerosos e importantes métodos gráficos.

Además, merece recomendarse el pequeño libro de J. Lüroth *Vorlesungen über numerisches Rechnen* (1), que está escrito en forma muy agradable por un perito en la materia y da una rápida orientación.

De entre todo lo que se refiere al cálculo con números enteros, voy a ocuparme preferentemente de *las máquinas de calcular*, de las que existen un gran número de diferentes e ingeniosos modelos, de constante aplicación en Bancos y Oficinas, y, por tanto, de reconocida importancia práctica.

Uno de los tipos más extendidos, es la Brungswiga, fabricada por la casa Grimme, Natali y Compañía de Brunswick. Es una de las máquinas más reducidas y sencillas, y aun cuando no pueda decirse que es la mejor, posee en cambio la gran ventaja de su relativa baratura.

Su construcción es debida al matemático ruso Odhmer y ha sido conocida primitivamente bajo el nombre de *aritmómetro*. Explicaremos el funcionamiento de esta máquina con algún dete-

(1) Leipzig, 1900.

nimiento, como un ejemplo típico, y para la descripción de otras máquinas, puede acudir a los ya citados libros, en los cuales figuran. La descripción que yo hago de la Brunswiga sólo servirá para que se hagan ustedes cargo exacto de ella, si después examinan detalladamente la máquina y la hacen funcionar.

El aspecto exterior de la Brunswiga muéstrase esquemáticamente en la siguiente figura (fig. 1): Una caja fija, el *tambor*, en

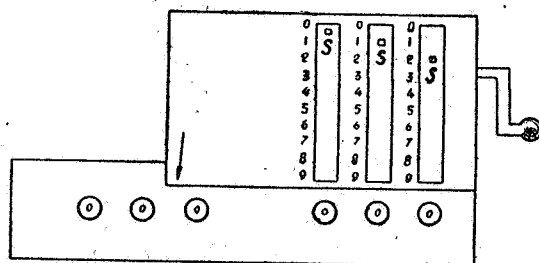


Figura 1

cuya parte inferior está adosada otra caja más pequeña y alargada, el *carro*, que puede correrse a derecha e izquierda a lo largo del tambor; del costado derecho de éste sale una manivela que se puede hacer girar con la mano.

En el tambor hay una serie de ranuras verticales sucesivas y al lado de cada una, y de arriba abajo, aparecen marcadas las cifras 0, 1, 2, ..., 9; de cada una de estas ranuras sale un gatillo, S, que puede colocarse al lado de cualquiera de estas cifras. A cada una de estas ranuras corresponde abajo, en el carro, una abertura circular bajo la cual puede aparecer una cifra.

Para hacer más clara la construcción y el funcionamiento de la máquina, vamos a describir cómo se ejecutó una *determinada* operación, por ejemplo, la *multiplicación*.

El procedimiento es el siguiente: *Primeramente se escribe el multiplicando sobre el tambor mediante los gatillos que salen de las ranuras del mismo*; para lo cual, se lleva, empezando por la derecha, el primer gatillo al lado de la cifra de las unidades del multiplicando, el segundo al de la cifra de las decenas, y así sucesivamente. Si, por ejemplo, es 12 el multiplicando, se lleva el primer gatillo al 2, el segundo al 1 y todos los demás se dejan en el cero (fig. 1).

Ahora se hace girar una vuelta completa hacia la derecha a la manivela; aparece entonces bajo los agujeros del carro el multiplicando; en nuestro caso, un 2 en el primero de la derecha y un 1 en el segundo, en tanto que en todos los demás queda el cero.

En el lado izquierdo del carro hay un contador constituido por una serie de agujeros y en el que, en la operación que vamos haciendo, aparece un 1, que indica que hemos dado una vuelta completa a la manivela (fig. 2). En general, cuando el multiplica-

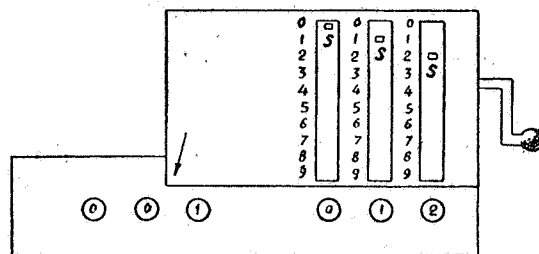


Figura 2

dor es de una sola cifra, se dan tantas vueltas completas a la manivela como indica aquella, e inmediatamente aparece en la parte izquierda del carro el multiplicador y en la derecha el producto.

¿Cómo realiza esto el aparato?

Primeramente hay dentro del carro, bajo cada uno de los agujeros del contador, una rueda dentada cuyos dientes llevan las cifras 0, 1, 2, ..., 7, 8, 9. Un engranaje obliga a esta rueda a girar en cada vuelta de la manivela una décima de vuelta; así que la cifra que aparece bajo el primer agujero de esta parte del carro, indica, en efecto, el número de vueltas dadas a la manivela, y, por lo tanto, el multiplicador.

Veamos lo que se refiere a la formación del producto; bajo cada agujero de la derecha del carro hay una rueda análoga a la anterior. ¿Cómo se explica, ahora que para una misma vuelta dada a la manivela, en el ejemplo propuesto venga un 2 al primer agujero y un 1 al segundo? Aquí radica lo característico de la construcción de la Brunswiga.

Bajo cada ranura del tambor hay montado sobre el eje de la manivela, un disco (rueda motriz) al que están unidos, en dirección de los radios, 9 dientes móviles. Mediante el gatillo que so-

bresale de la ranura, de que antes se habló, se hace girar un anillo R que guarnece el contorno del disco, de tal modo que al sacar el gatillo S junto a los números 0, 1, 2, ..., 9 el anillo permite que sobresalgan del borde del disco otros tantos dientes (en la figura 3, dos dientes).

Estos dientes encajan directamente en las ruedas dentadas que se hallan bajo los agujeros correspondientes del carro, y en una vuelta de la manivela cada rueda motriz empuja, por consiguiente, tantos dientes de la rueda correspondiente al carro como dientes han quedado salientes en aquélla, es decir, tantos como indica la cifra que está al lado del gatillo.

Según esto, en el ejemplo de que vamos dando cuenta, al par-

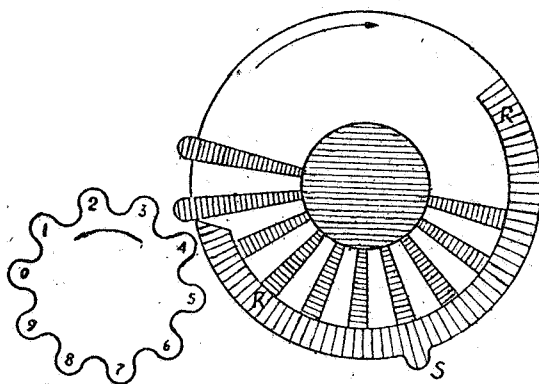


Figura 3

tir de la posición en que están los ceros en los agujeros de la izquierda del carro y dar una vuelta a la manivela, la rueda de las unidades del tambor hace salir el 2 y la de las decenas el 1 en los agujeros correspondientes del carro. Al dar una segunda vuelta, la rueda de las unidades gira en otros dos dientes y la de las decenas en uno y, por consiguiente, aparecerá 24, y del mismo modo dando tres vueltas aparecerá $36 = 3 \cdot 12$; dando cuatro vueltas, $48 = 4 \cdot 12$.

Dando una quinta vuelta a la manivela, habríamos hecho girar a la rueda de las unidades otros dos dientes y, por tanto, volverá al 0, mientras que la rueda de las decenas hará aparecer el

5 en el agujero correspondiente, de modo que parece que obtendríamos, así, el producto falso 50, en lugar del exacto 60. Pero no ocurre así, sino que aun cuando, en efecto, un poco antes de terminar esta quinta vuelta de la manivela aparece el producto falso 50, acabando de darla por completo, aparece en el último instante la cifra 6 en lugar de 5, con lo que se obtiene el resultado exacto. Aquí ha funcionado, pues, algo que hasta ahora no ha sido descrito, y que en las máquinas de calcular constituye la parte

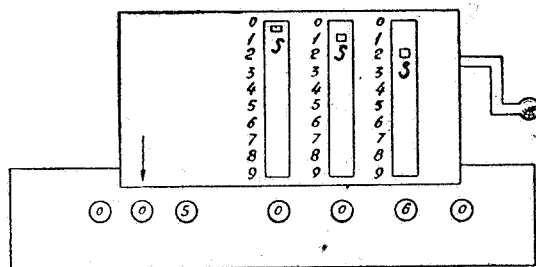


Figura 4

más delicada de su construcción, *el paso de las decenas*. El principio en que se funda es el siguiente: *Cuando una de las ruedas del carro* (en nuestro ejemplo, la rueda de las unidades) *pasa por cero, entonces oprime a un diente lateral de la rueda motriz contigua* (de las decenas) *y la hace engranar con la rueda correspondiente del carro de modo que ésta gira un diente más de lo que sin el artificio hubiera girado*. Los pormenores de esta disposición se comprende a la sola vista del aparato. En máquinas de otros sistemas, los mecanismos que realizan al paso de las decenas son muy diferentes, por lo cual no insistimos en más pormenores acerca de ello.

El modo de actuar de esta máquina estriba, como ven ustedes, en esencia y dicho en pocas palabras, en que *es una máquina de sumar que a todo número que aparece a la derecha del carro, le agrega, al dar una vuelta a la manivela, el número inscrito en el tambor*.

Para terminar diremos algo acerca de la disposición dada a esta máquina, que permite *operar con multiplicadores de varias cifras*. Supongamos que queremos hallar el producto 15.12; según lo antes dicho, habría que dar 12 vueltas al manubrio y, ade-

más; si se quiere que en la parte izquierda del carro aparezca el multiplicador, debería haber allí un paso de decenas. Se evitan ambas cosas por el siguiente mecanismo: Efectuaremos, primero, la multiplicación por 5, de modo que en la izquierda del carro aparece el 5 y en la derecha 60, *corremos ahora el carro un lugar hacia la derecha*, con lo cual la rueda de las unidades de éste queda aislada y no trabaja ya; la de las decenas viene a colocarse debajo de la ranura de las unidades del tambor, y así sucesivamente las demás ruedas del carro, mientras que por la parte izquierda de éste, en lugar del contador de las unidades viene a ponerse en relación con el engranaje ligado a la manivela el contador de decenas. Entonces, al hacer girar una vuelta a la manivela, aparece el 1 en el agujero de las decenas de la izquierda, leyéndose, por lo tanto, 15 en esta parte del carro; a la derecha no resulta como antes hubiera ocurrido la suma $\left. \begin{array}{r} 60 \\ + 12 \end{array} \right\}$, sino $\left. \begin{array}{r} 60 \\ + 12 \end{array} \right\}$ o, dicho de otro modo, puesto que el 2 ha pasado a la rueda de las decenas y el 1 a las centenas: $60 + 120$, que es el verdadero producto.

Como vemos, *esta manipulación es la exacta traducción mecánica del procedimiento usual de multiplicación de números de varias cifras*, en el cual, cada producto del multiplicando por cada cifra del multiplicador se corre un lugar hacia la izquierda respecto del anterior, se escribe debajo de él y después se suman. *Exactamente igual se multiplican aquí números de varias cifras; pues, después de cada multiplicación parcial, el carro se corre 1, 2, ... lugares hacia la derecha y entonces se dan tantas vueltas a la manivela como indica la cifra de las decenas, centenas, ... del multiplicador.*

La máquina realiza otras operaciones, como puede verse directamente manejándola: baste aquí hacer notar que *la sustracción y la división se operan girando el manubrio en sentido opuesto al de la multiplicación.*

Obsérvese, también, que *el principio teórico de la máquina es completamente elemental, y representa solamente una realización práctica de las reglas que se aplican en el cálculo numérico.* Después, el que la máquina funcione con seguridad, que todas sus partes encajen mutuamente y sin tropiezos, que las ruedas denta-

das no giren más que lo necesario, etc., son cosas que quedan a la pericia del constructor y de los mecánicos que la fabriquen.

Dediquemos un momento todavía a examinar la *significación general del trabajo que realizan las máquinas de calcular*, que evitan al matemático el trabajo mecánico del cálculo numérico, llevándolo a cabo no sólo más rápidamente, mas sin errores, ya que la máquina no puede cometer los que, por distracción, comete el hombre cuando calcula. En la existencia de tales máquinas se ve precisamente una confirmación de que *para el cálculo, lo que importa no es lo que **signifiquen** los números enteros, sino únicamente las reglas formales*, puesto que la máquina realiza éstas, como antes queda dicho, y no puede tener una noción intuitiva de la *significación* de los números. Así, no debe extrañar, ni parecer casual, que un hombre como *Leibniz*, pensador abstracto de primera línea, pero dotado de un espíritu eminentemente práctico, fuera al mismo tiempo el *padre de la Matemática formal* y el *inventor de la primera máquina calculatoria*. Su máquina se conserva todavía hoy entre nosotros, y es una de los objetos más preciosos del *Kästnermuseum* de Hannover. No es históricamente creíble, esta es al menos mi opinión, que Leibniz persiguiera con el descubrimiento de la máquina de calcular solamente un fin práctico, sino que precisamente con ella quiso poner bien de manifiesto el carácter puramente formal de la operación matemática.

Claro es que tampoco quiso Leibniz al construir su máquina de calcular rebajar el *valor del pensamiento matemático*; y sin embargo, de la existencia de tales máquinas hay ahora quienes pretenden inferir tal conclusión. Si la actividad de una ciencia, se dice a veces, puede ser realizada por el uso de una máquina, no debe de ser gran cosa el contenido de ella, y cabe asignarle un papel ínfimo; pero basta, para desvanecer tal argumento, tener en cuenta que el matemático, aun cuando opere con números y fórmulas, de ningún modo es un pobre remedo de la máquina infalible, que no solamente no es el *pensador sin pensamiento* de Thomae, sino que, por el contrario, se plantea sus problemas con fines concretos, útiles e interesantes, resolviéndolos siempre de modo original y característico. Solamente para descargar su mente de ciertas operaciones que se repiten de un modo unifor-

me, ha ingeniado tales mecanismos, y aun en esto, no debiera olvidarse que él es quien las ha inventado, y él quien las encomienda los únicos problemas que pueden resolver, para que le den los resultados.

Para terminar esta primera parte, permítaseme expresar el deseo de que, dada la gran importancia de las máquinas de calcular, se extienda su conocimiento y uso a otros sectores que, desgraciadamente, precinden de ella. Sobre todo, naturalmente, quisiera yo que todo maestro estuviese familiarizado con el uso de estos aparatos, y, aun más, que a ser posible, *no saliese de nuestras Escuelas ningún alumno sin que, siquiera una vez, hubiese manejado una máquina de calcular.*

CAPITULO II

LAS PRIMERAS GENERALIZACIONES DEL CONCEPTO DE NUMERO

Dejando a un lado los números enteros, vamos a tratar en este capítulo de la *generalización del concepto de número*. En la escuela se acostumbra hacer esto, siguiendo un proceso cuyas fases sucesivas son las siguientes:

- 1) *Introducción de los quebrados y cálculo con los mismos.*
- 2) *Operaciones con números negativos*, al mismo tiempo que se comienza el cálculo literal.
- 3) *Exposición más o menos detallada del concepto de número irracional mediante ejemplos tomados de diversos problemas*, de los cuales surge poco a poco la idea del continuo de todos los números reales.

Queda al juicio del profesor el orden en que han de tratarse los dos primeros puntos; aquí nos ocuparemos, en primer lugar, de los números negativos.

I. Los números negativos

Ante todo, una observación relativa a la terminología de estos números. En la escuela se consideran los números positivos y negativos como *números relativos* en contraposición con los «absolutos» (positivos); en tanto que en la Universidad no es corriente tal lenguaje. No sólo esto; en la escuela, al mismo tiempo que la de «números relativos», aparece la designación de «números algebraicos» (1) que nosotros usaremos aquí en otro sentido muy distinto.

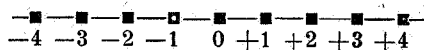
(1) Véase, por ejemplo, Mehler, *Hauptsätze der Elementarmathematik* (19 ed., Berlín, 1895), pág. 77.

En lo que respecta la formación e introducción de los números negativos, seremos breves, ya que son familiares al lector, y, en último término, puede orientarse fácilmente sobre ellas, según lo que aquí digamos. Puede consultarse la ya citada obra de Weber-Wellstein, y el libro *Algebraischer Analysis*, de H. Burkhardt (1), que por todo su contenido es altamente recomendable.

Los números negativos aparecen cuando se trata de *hacer posible la sustracción en todos los casos*. Si $a < b$, entonces $a - b$ es un símbolo que carece de significado en el campo de los números enteros; pero, en cambio, existe el número $b - a = c$ y se pone

$$a - b = c, \dots$$

y se le llama *número negativo*. A esto se agrega la representación de todos los números enteros, mediante la *escala forma-*



da por puntos equidistantes del punto cero, a uno y otro lado en la recta indefinida que se llama **eje de abscisas**. Esta interpretación geométrica es hoy familiar a toda persona medianamente culta; debiéndose, sin duda, su divulgación a la conocidísima escala termométrica.

Un ejemplo intuitivo muy usado de los números negativos es el de los saldos de las cuentas comerciales, en que los cálculos se hacen sobre el Debe y el Haber.

A pesar de todos estos ejemplos y muchos más que pudieran ponerse para aclarar el concepto de número negativo, no puede desconocerse la gran dificultad de su introducción en la escuela. El alumno está acostumbrado a ver en los números, primero, y más tarde en las letras con que opera, representaciones de cosas reales y concretas, y en las operaciones con números o letras las correspondientes operaciones con las cosas, y se encuentra ahora algo de naturaleza muy diferente, con los números negativos que no tienen nada que ver con la imagen sensible que se ha forjado del número, y, sin embargo, ha de operar con ellos, aunque las operaciones han perdido aquella significación

(1) Leipzig, 1903; tercera edición, 1920.

clara e intuitiva que antes tenían. Se presenta, pues, aquí por primera vez, el *paso de la matemática práctica a la formal*, para cuya completa comprensión es precisa en alto grado la capacidad de abstracción.

Veamos ahora lo que sucede en cada una de las operaciones fundamentales al introducir los números negativos. Resulta, desde luego, evidente que *la adición y la sustracción se refunden en una sola operación*: la adición de un número positivo es simplemente la sustracción del número negativo opuesto de igual valor. Max Simon hace aquí la ingeniosa observación de que habiéndose introducido los números negativos precisamente con el fin de hacer la sustracción siempre posible, ésta deja inmediatamente de existir como operación independiente.

Para esta nueva operación que comprende adición y sustracción, son válidas las antiguas cinco leyes formales (pág. 10) que pueden brevemente resumirse así:

- 1) *Posibilidad sin excepción.*
- 2) *Uniformidad.*
- 3) *Asociatividad.*
- 4) *Conmutatividad.*
- 5) *Monotonía.*

Respecto de esta última, es de observar que $a < b$ significa que, en la citada representación geométrica, se halla a a la izquierda de b ; así, por ejemplo, $-2 < -1$, $-3 < +2$.

En la multiplicación es punto esencial la llamada *regla de los signos*, que se indica así:

$$a(-c) = (-c)a = -(a \cdot c) \quad \text{y} \quad (-c)(-c') = +(c \cdot c');$$

la última especialmente: «menos por menos da más», es frecuentemente «piedra de escándalo» para muchos. La razón de esta ley será explicada más tarde; por ahora, nos limitaremos a enunciar la regla para efectuar el producto de un número cualquiera de factores positivos y negativos: *el valor absoluto del producto es igual al producto de los valores absolutos de los factores; y su signo es positivo o negativo, según que sea par o impar el número de factores negativos.*

Admitido este convenio, la multiplicación en el campo de los números positivos y negativos tiene las siguientes propiedades:

- 1) *Posibilidad sin excepción.*
- 2) *Uniformidad.*
- 3) *Asociatividad.*
- 4) *Conmutatividad.*
- 5) *Distributividad respecto de la adición.*

Sólo en lo que se refiere a la ley de monotonía hay aquí una variación; en su lugar, se verificará esta otra:

- 6) *Si $a > b$, $a c \leq b c$, según que sea $c \geq 0$.*

Veamos ahora, nuevamente, si estas leyes, consideradas desde un punto de vista puramente formal, son compatibles. En primer término, hemos de decir que aquí menos que en el caso de los números naturales puede pretenderse una demostración lógica pura de esta compatibilidad. Lo único que se puede asegurar es que las expresadas leyes son compatibles, si su aplicación a los números naturales no da origen a ninguna contradicción; pero en lo que respecta a estos números, todo lo que se ha podido demostrar es que existen cosas concretas entre las cuales se pueden establecer relaciones también concretas que satisfacen a dichas leyes.

Como ejemplo de tales entes, hemos citado ya la *serie de los puntos de abscisa entera del eje de las abscisas*, y nos queda ahora por ver la significación de las operaciones del cálculo en esta escala.

La *adición* $x' = x + a$, hace corresponder a cada punto x , otro punto x' , de tal suerte que la *recta indefinida sufre una traslación sobre sí misma igual a un segmento a* y a la derecha o a la izquierda según que a sea positivo o negativo. Análogamente, la *multiplicación* $x' = ax$ *representa una transformación homotética de la recta en sí misma, que si $a > 0$ es una dilatación, y si $a < 0$ el conjunto de una dilatación y de un giro alrededor del origen.*

Es interesante ver el *origen y desarrollo histórico de estos conceptos.*

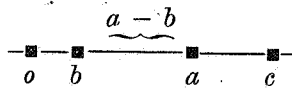
Naturalmente, no puede pensarse que los números negativos hayan sido invención exclusiva de algún sabio, que al mismo tiempo, atendiendo a su significación geométrica, por ejemplo, llegase a establecer la compatibilidad de las leyes del cálculo; sino más bien, que durante largo tiempo, se impuso a los matemáticos el empleo de estos números; y sólo después de haber

operado mucho con ellos, ya en el siglo XIX, ha ocurrido para la atención en su compatibilidad.

La historia de los números negativos muestra que los antiguos griegos no tuvieron noción de ellos; de modo, que en este punto, no se les puede asignar el primer lugar, como muchos hacen. Por el contrario, puede asegurarse que sus descubridores son los indios, a quienes también se deben el cero y el sistema de numeración decimal. En Europa empezaron a usarse en la época del Renacimiento, siendo su introducción muy lenta y después de realizado totalmente el paso al cálculo literal, cosa lograda primeramente por Vieta en su memoria *In artem analyticam isagoge* (1).

Desde este momento histórico, se posee la llamada *regla de los paréntesis* para el cálculo con números positivos, la cual, naturalmente, está contenida en las ya expuestas leyes formales, cuando se agregan a ellas las correspondientes a la sustracción.

Estudiémosla más detenidamente mediante dos ejemplos que nos ofrecen, ante todo, la posibilidad de dar *para los mismos demostraciones sumamente sencillas e intuitivas*, que realmente po-



dían reducirse a contemplar las figuras y decir: «Véase», como era costumbre entre los antiguos indios.

1) Sea $a > b$ y $c > a$. Entonces $a - b$ es un número positivo y más pequeño que c ; por lo tanto, debe existir el número positivo $c - (a - b)$. Representemos los números sobre el eje de abscisas, y observando que el segmento entre b y a , tiene la longitud $a - b$; la simple inspección de la figura adjunta muestra que, si quitamos del segmento c el $a - b$ se obtiene lo mismo que si quitáramos todo el segmento a y luego agregásemos la parte b ; es decir:

$$c - (a - b) = c - a + b \quad [1]$$

2) Sea $a > b$ y $c > d$; en cuyo caso también $a - b$ y $c - d$ son números enteros positivos. Veamos qué ocurre con el pro-

(1) Tours, 1591.

ducto $(a-b)(c-d)$. Para ello tracemos un rectángulo de lados $a-b$ y $c-d$, cuya área es el número $(a-b)(c-d)$ buscado; este rectángulo es una parte del de lados a y c .

Para obtener aquél partiendo de éste, quitaremos el rectángulo superior que aparece rayado horizontalmente y vale ad ; después el rectángulo de la derecha de rayado vertical bc ; estos dos tienen uno común, el rectángulo bd , que, por consiguiente,

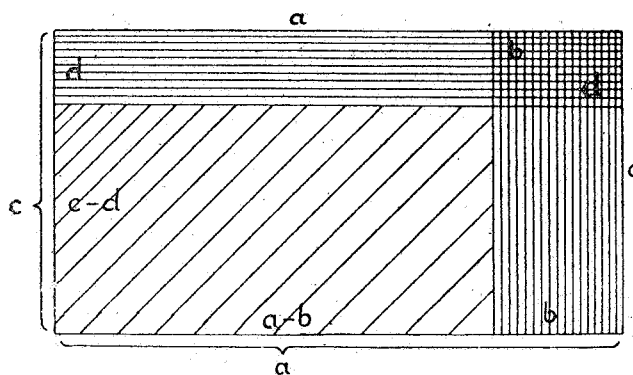


Figura 5

aparece quitado dos veces, de modo que habrá de ser agregado una para obtener el $(a-b)(c-d)$, con lo cual queda demostrada la fórmula

$$(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd \quad [2]$$

Observemos en este punto que con la introducción de los números negativos se manifiesta claramente la facultad de generalización de que está dotada la mente humana, por virtud de la cual, sin darnos cuenta de ello, *nos sentimos inclinados a extender y aplicar a cuestiones más generales conceptos y reglas deducidos y válidos para casos particulares*. Esta tendencia, aplicada a la Aritmética, cristaliza en el llamado *Principio de permanencia de las leyes formales*, explícitamente enunciado, por primera vez, por *Hermann Hankel* en su interesantísima y muy recomendable obra *Theorie der Complexen Zahlssysteme*.

Este principio general aplicado al caso que ahora nos ocupa del paso a los números negativos, nos diría que basta prescindir

en las fórmulas [1] y [2] de las relaciones de magnitud de a y b , y aplicar dicho principio a otros casos. Si, por ejemplo, en la fórmula [2], hacemos $a=c=0$, caso en que la fórmula no está demostrada, se obtiene $(-b)(-d)=+bd$, es decir, *la regla de los signos de la multiplicación de números negativos*.

De este modo aparecen, en efecto, casi sin demostración, todas las reglas que, siguiendo el mismo procedimiento, podríamos calificar de *hipótesis casi necesarias*, y que, realmente, son *necesarias si se quiere que las antiguas reglas sean válidas para los nuevos entes*. Ciertamente, no satisfacía por completo a los antiguos matemáticos este modo de concebir los números, y su descontento se traslucía en los nombres de *números imaginarios*, *números falsos*, etc., con que, a veces, todavía hoy se califican los números negativos. Pero a pesar de todos estos reparos, en los siglos XVI y XVII encuentran estos números cada vez mayor aplicación y llegan a obtener una aceptación cada vez más general, contribuyendo mucho a ello, sin duda, el desarrollo de la Geometría Analítica. Verdad es que seguían subsistiendo las preocupaciones y los prejuicios contra estos números, pero así tenía que suceder mientras se intentara interpretarlos como números representativos de colecciones o pluralidades y no se pusiese en claro el papel que desempeñaban las leyes formales en relación con los nuevos conceptos; y así se explican los muy repetidos intentos de demostración de la regla de los signos.

La cuestión sólo quedó aclarada, cuando, ya en el siglo XIX se observó que *no se trataba de una necesidad lógica de los nuevos conceptos ni, por consiguiente, de demostrar la regla de los signos, sino simplemente, de reconocer que tales nuevos conceptos son lógicamente admisibles*, aunque sean arbitrarios, y, lo mismo que el principio de permanencia, obedezcan a una simple razón de comodidad.

Al hacer estas consideraciones, no hay por qué ocultar algo que de ellas se desprende, a saber: que *a veces, las cosas parecen ser más razonables que los hombres*; véase lo que aquí ocurre con uno de los grandes progresos de la Matemática, la introducción de los números negativos y las operaciones con los números. No se ha llegado a ellos por razonamientos lógicos de ningún hombre aislado, sino que su aparición como desarrollo orgánico

han sido obra lenta, resultado de un manejo constante e intensivo de las cosas, pareciendo como si el hombre hubiese aprendido de las letras. El reconocimiento consciente de que se trata de algo realmente justo que se acomoda con la lógica más rigurosa llegó mucho después:

En general, la lógica sólo puede actuar en la formación de nuevos conceptos *regulándolos, pero nunca dando por sí misma el principio director*, pues la única condición que impone, la compatibilidad, es evidente que siempre queda satisfecha por un gran número de sistemas de conceptos.

El lector que desee estudiar más a fondo la historia de los *números negativos*, puede consultar la *Geschichte der Elementarmathematik* (1) de *Tropfke*, que contiene muchos pormenores sobre el desarrollo de los conceptos elementales, su representación y notaciones, expuestos en forma clara y sencilla.

Examinemos, ahora, desde el punto de vista crítico, los métodos que se siguen *en la escuela en la exposición de los números negativos*. Es de observar, en primer término, el *error* frecuente de seguir con el empeño de los antiguos matemáticos de demostrar la necesidad lógica de la regla de los signos. Especialmente dan como *demonstración* la deducción eurística de $(-b)(-d) = +bd$ de la fórmula

$$(a-b)(c-d) = ac - bc - ad + bd$$

olvidándose completamente que la validez de ésta exige que sean $a > b$ y $c > d$ (2). Con esto lo que realmente se hace es escamotear la demostración, sustituyendo el *motivo psicológico*, que, en virtud del principio de permanencia, nos permite establecer la citada regla, por un *motivo demostrable lógicamente*. Es indudable que el alumno no puede entender bien esto al oírlo por primera vez, pero llega a creerlo; y si, como ocurre muchas veces, al explicárselo nuevamente en los grados superiores de la enseñanza, no se le da el complemento necesario para una total comprensión, no es raro que llegue a adquirir el convencimiento de que algo místico e incomprensible debe de ser todo aquello.

(1) Dos tomos, Leipzig, 1902 y 1903.

(2) Véase, por ejemplo, H. Heis, *Sammlg. von Beispielen und Aufgaben a. d. Arithmetik u. Algebra*, 106-108 Aufl. (Colonia, 1904), pág. 46.

Contrariamente a esta práctica se impone, a mi modo de ver, la necesidad de no intentar demostraciones imposibles; sino, antes bien, convencer al discípulo por medio de ejemplos sencillos correspondientes a la realidad de las cosas, y aun, si es posible, hacerle descubrir por sí mismo que precisamente todos los convenios y definiciones que se apoyan en el principio de permanencia de las leyes formales, son apropiados para llegar a un algoritmo uniforme y cómodo; en tanto, que cualesquiera otros convenios quitarían generalidad a todas las reglas, obligando a considerar, dentro de cada una, numerosos casos diferentes.

En esto, como en tantas otras cosas, hay que proceder sin precipitación, dejando tiempo al alumno para que se realice la evolución en su mente; y aunque fácilmente se comprenden los inconvenientes de otros convenios, debe hacerse resaltar las grandes ventajas que se siguen de establecer un convenio general apropiado.

Damos por terminado con esto lo que se refiere a la teoría de los números negativos, y pasamos a considerar desde puntos de vista análogos, la segunda ampliación dada al concepto de número.

II. Los números fraccionarios

Partiremos del modo como se tratan estos números en la escuela. En ella tiene el quebrado $\frac{a}{b}$ desde el principio una significación bien concreta; comparada con la noción intuitiva del número entero, sólo se advierte un cambio del substratum. Se ha pasado del número a la medida, de la consideración de cosas numerables a la de cosas medibles.

Con una cierta limitación el sistema de monedas o el de pesas, y de un modo más completo el sistema de longitudes, son ejemplos de magnitudes medibles, y por medio de ellos llega a hacerse asequible a la inteligencia del alumno el concepto de quebrado; comprender qué son $\frac{1}{3}$ de metro o $\frac{2}{5}$ de libra no tiene dificultad ninguna.

Las relaciones =, > y < entre quebrados, lo mismo que las

operaciones de sumar y restar, se explican partiendo siempre del concepto intuitivo y concreto de los quebrados. Para hacer comprensible la multiplicación se modifica ligeramente su primitiva significación, diciendo: *multiplicar un número por $\frac{a}{b}$ significa multiplicarlo por a, y dividir luego el producto por b; o también, el producto se forma con el multiplicando del mismo modo que $\frac{a}{b}$ con la unidad.*

La división por un quebrado se define, entonces, como *operación inversa* de la multiplicación, y se dice: *$a : \frac{2}{3}$ es el número que multiplicado por $\frac{2}{3}$ nos da a.*

Todos estos conceptos y reglas de las operaciones con quebrados se combinan con los números negativos, llegando así a operar con el **conjunto de todos los números racionales**. No es nuestro objeto entrar en detalles de toda la sistematización de esta teoría, que en la escuela, naturalmente, consume mucho tiempo; lo que sí haremos es *compararla con la que da la Matemática moderna*, y como ejemplo ilustrativo de esto, tomaremos las obras, ya citadas, de Weber-Wellstein y de Burkhardt.

En la primera predominan siempre los *puntos de vista formales*, que consideran la multiplicidad de las diferentes significaciones posibles, para extraer de ellas todo cuanto necesariamente tienen de común. *El quebrado $\frac{a}{b}$ es un símbolo, un par de números, con el cual se opera según reglas determinadas.*

Estas reglas, que realmente han nacido de la significación de los quebrados primeramente expuesta, *tienen aquí el carácter de convenios arbitrarios*. Así, por ejemplo, los teoremas relativos a la invariabilidad de un quebrado por multiplicación o división de sus dos términos por un mismo número, tienen para el alumno un carácter intuitivo, y en esta otra teoría aparecen bajo la forma de una **definición de la igualdad**.

Dos quebrados $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se llaman iguales si es $ad=bc$.

Análogamente se definen los conceptos de mayor y menor;

y se establece que la suma de quebrados $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ es el $\frac{ad + bc}{bd}$, y así en todo lo demás.

Después, se *demuestra* que las operaciones así definidas poseen en el nuevo campo de números las propiedades formales de la adición y multiplicación para números enteros, es decir, que satisfacen a las tantas veces nombradas *once leyes fundamentales*.

Bürkhardt no procede en su libro de un modo tan puramente formal como Weber-Wellstein; considera al quebrado $\frac{a}{b}$ como la sucesión de dos **operaciones** en el campo de los números enteros: una multiplicación por a , seguida de una división por b , suponiéndose naturalmente que el objeto sobre el cual recaen estas dos operaciones es un número entero cualquiera. Tomando dos pares de **operadores** $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ sucesivamente, resulta, entonces, la multiplicación de quebrados; y se reconoce fácilmente que la operación así obtenida no es otra cosa que la multiplicación por $a \cdot c$ y la división por $b \cdot d$; de modo que se llega a la regla de la multiplicación $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ partiendo de una significación clara y precisa de los quebrados, y no por un simple convenio arbitrario. Análogas consideraciones caben respecto de la división; por el contrario, la adición y la sustracción no admiten ninguna sencilla interpretación derivada de este concepto de números quebrados, sino que la fórmula $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ es también para Bürkhardt como un convenio, que sólo obedece a razones de conveniencia.

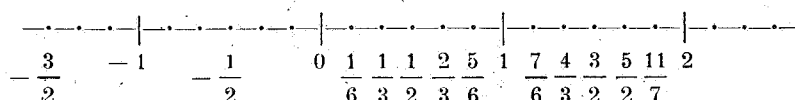
Comparemos ahora la exposición clásica de los quebrados con las concepciones modernas que acabamos de citar. En éstas, tanto en la una como en la otra, realmente nos movemos siempre, a pesar de la ampliación del concepto de número, en el terreno de los números enteros; lo único que se supone es que se tiene el concepto intuitivo del conjunto de los números o que se conocen las operaciones con ellos, y entonces se les agregan los nuevos números y sus operaciones, como par de números enteros, u operaciones, respectivamente.

*La exposición escolar de los quebrados se basa exclusivamente en la **nueva intuición** de las magnitudes medibles, que dan una imagen sensible del concepto de quebrado. Se concibe bien la diferencia entre ambas doctrinas, imaginando un ente que sólo tuviera la idea de los números enteros, pero que careciese de toda intuición acerca de las magnitudes medibles; para tal ser la exposición clásica resultaría completamente ininteligible, y en cambio comprendería perfectamente cualquiera de las exposiciones de Weber-Wellstein y de Burkhardt.*

Cabría preguntarse, ahora, cuál de estas concepciones es la mejor y qué se debe a cada una de ellas. La respuesta a tales preguntas es parecida a la dada con motivo de análogas cuestiones sobre números enteros: *Seguramente **la exposición moderna es más pura, pero, en cambio, es también más pobre.*** Pues, de todo lo que la exposición clásica nos da *de una vez*, sólo nos da la otra *una mitad*: *la introducción abstracta, completamente lógica de ciertos conceptos aritméticos—llamados quebrados—y las operaciones con ellos*; pero queda sin resolver todavía una *segunda cuestión totalmente independiente de aquélla y no menos importante que ella*: *¿Se podrán aplicar a las magnitudes intuitivamente medibles, estas teorías de los quebrados deducidas de un modo tan puramente lógico?* También ahora pudiera calificarse esta cuestión como propia de la «Matemática aplicada», que cabe tratar con entera independencia, pero sería muy discutible la conveniencia de tal separación desde el punto de vista *pedagógico*. En el libro de Weber-Wellstein se presenta esta excisión del problema en dos partes de un modo muy característico: Después de la introducción abstracta del cálculo de los quebrados, al que únicamente nos hemos referido hasta ahora; dedica una sección especial (la quinta)—titulada «Razones»—a resolver *cuál es la aplicación real de los números racionales al mundo material*, estudiando esta cuestión de un modo más teórico que intuitivo.

Terminaremos nuestras explicaciones acerca de los quebrados con una *observación general sobre el conjunto de todos los números racionales*; y vamos a servirnos para hacerla más intuitiva de su representación sobre la línea recta. Imaginemos marcados sobre la recta todos los puntos de abscisa racional, que, para abreviar, llamaremos *puntos racionales*. Se dice, entonces, *que el con-*

junto de todos estos puntos racionales es **denso en todas partes**, lo cual significa que, en cualquier intervalo, por pequeño que sea, hay infinitos puntos racionales. Dicho de modo más preciso para



que no intervenga nada extraño al concepto de puntos racionales : *Entre dos puntos racionales hay siempre otro también racional*, lo que tiene como consecuencia que de la totalidad de los números racionales podemos separar una parte finita que no contenga un elemento menor que los demás, ni tampoco uno mayor que los restantes.

Un ejemplo de esto es el conjunto de los números racionales comprendidos entre 0 y 1, excluidos estos números, pues para todo número racional del conjunto existe uno comprendido entre él y 0, siendo, por lo tanto, *menor* que aquél ; y otro entre el dado y el 1, que por consiguiente, es *mayor* que él. Estos conceptos pertenecen ya en su formación sistemática a la *teoría de los conjuntos de Cantor*; y, en efecto, más adelante tendremos ocasión de emplear el conjunto de los números racionales con las propiedades aquí expuestas como un *ejemplo importante de un conjunto*.

III. Los números irracionales

No nos ocuparemos aquí en cómo se introducen ordinariamente estos números en la escuela, ya que en ella no se va más allá de algunos ejemplos relativos a los mismos ; sino que comenzaremos, desde luego, por exponer *el desarrollo histórico* de esta idea. *Históricamente, el origen del concepto de número irracional se encuentra siempre en la intuición geométrica y en las necesidades de la misma Geometría*. Consideremos el eje de abscisas, en el que, como antes dijimos, está marcado el conjunto de los números racionales que es denso en todas partes ; además de estos puntos *existen sobre dicho eje otros*, que Pitágoras fué el primero en señalar de modo parecido al siguiente : Si tenemos un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen la longitud 1, la de la hipotenu-

sa es igual a $\sqrt{2}$ y éste no es número racional ; pues si escribimos $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros primos entre sí, fácilmente se llega a una contradicción con resultados conocidos de la divisibilidad de números enteros. *Llevando el segmento así construído al eje de abscisas a partir del origen, se obtiene un punto no contenido en el conjunto denso en todas partes de los números racionales*; más aún, el teorema de Pitágoras da como valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos están medidos por los números enteros m y n , un número $\sqrt{m^2 + n^2}$ que, en la mayoría de los casos, es irracional. Tan noble descubrimiento bien merecía el sacrificio de 100 bueyes con que fue celebrado por Pitágoras y en cuyo comentario tanto ingenio se ha derrochado. Sabemos también que la escuela pitagórica se ocupaba con predilección en la investigación de aquellos pares de números enteros m y n para los cuales los triángulos rectángulos correspondientes tenían sus tres *lados racionales* (los llamados *números pitagóricos*); de que el ejemplo más sencillo es 3, 4, 5, y sobre los cuales volveremos a hablar más adelante.

Los matemáticos griegos posteriores estudiaron además de estas irracionalidades sencillas, otras cada vez más complicadas ; encontrándose, en Euclides, tipos como $\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ y otras semejantes. En general, se puede decir que *se limitaron esencialmente a todas las irracionales que se obtienen por aplicación repetida de la extracción de raíces cuadradas, y que por ello se podían construir con la regla y el compás ; pero nunca llegaron a tener la idea general del número irracional.*

Conviene, sin embargo, precisar más esta afirmación para evitar posibles equívocos. Con ella queremos significar únicamente que los griegos no poseyeron ningún procedimiento que les permitiera establecer estos números partiendo de los racionales y facilitara su estudio en forma parecida a la que modernamente se hace y que veremos en seguida. *No obstante, el número real no necesariamente racional les era familiar ; sólo que tenía para ellos un sentido completamente distinto que para nosotros, puesto que no utilizaban letras para designar los números en general. Lo que ellos hacían—y Euclides lo expuso ya sistemáticamente—era considerar razones entre dos segmentos rectilíneos cualesquiera, y*

operaban con ellas de un modo análogo a como se procede hoy con los números reales, y hasta se encuentran definiciones en Euclides que se armonizan perfectamente con la moderna teoría del número irracional. Y llegaban a más; la distinguían de los números naturales, llamando a éstos αριθμοσ, en tanto que a las razones de segmentos cualesquiera, o sea a los números reales, los designaban con la palabra λογος. Y apuntemos, de paso, algo sobre la palabra «irracional». Probablemente procede de una traducción latina errónea de la palabra griega αλογος. Esta palabra debería significar probablemente «no expresable», queriendo con ello indicar que los nuevos números, o sea las razones de segmentos inconmensurables, no podrían expresarse como *razón de dos números enteros* (1) y una mala inteligencia del traductor hizo derivar de aquí el calificativo de irracionales que hoy se les da a estos números.

La idea general del número irracional hizo su aparición al final del siglo XVI, como consecuencia de la introducción de las fracciones decimales, cuyo uso se generalizaba ya entonces con motivo de la formación de las tablas logarítmicas. Cuando se transforma un quebrado ordinario en fracción decimal, pueden obtenerse, aparte de las fracciones limitadas, otras ilimitadas, que son necesariamente periódicas. El ejemplo más sencillo es $\frac{1}{3} = 0,333\dots$, esto es, una fracción decimal periódica cuyo período es de una sola cifra, 3, que se repite indefinidamente después de la coma. Ahora bien, nada hay que impida considerar una fracción decimal aperiódica, esto es, una fracción decimal cuyas cifras se suceden sin obedecer a ley alguna determinada y, sin parar mientes en más, cualquiera la consideraría como un número determinado, aunque, naturalmente, no racional. Con esto se tiene ya el concepto general del número irracional, espontánea creación, en cierto modo, del proceso aritmético que lleva consigo la fracción decimal. Históricamente acontece aquí, pues, lo que ya vimos que sucedía con los números negativos: el cálculo obligó a que se introdujeran los nuevos conceptos, y sin que se pensase gran cosa sobre su esencia y fundamento se operaba con

(1) Véase Tropicke, Tomo I, pág. 163.

ellos, afirmándose su existencia, sobre todo al reconocer repetidamente su extraordinaria utilidad.

Sólo al llegar el año 60 del siglo XIX se dejó sentir la necesidad de formular aritméticamente, de manera más precisa, los fundamentos de los números irracionales, siendo Weierstrass el primero que abrió camino a estas investigaciones, en sus lecciones de aquellos años, explicadas en la Universidad de Berlín. Después, en el año 1872, G. Cantor, el fundador de la teoría de conjuntos, dió en Halle una teoría general de dichos números y simultánea e independientemente de él, hizo otro tanto en Brunswick R. Dedekind. La idea fundamental de Dedekind puede exponerse en muy pocas palabras. Imaginemos el conjunto de todos los números racionales y excluyamos todo concepto intuitivo espacial que nos lleve a la idea de la continuidad de tal serie de números. Partiendo de esto, para llegar a una *definición puramente aritmética del número irracional*, introduce Dedekind el siguiente concepto de *cortadura en el campo de los números racionales*. Sea r un número racional cualquiera, y dividamos la totalidad de los números racionales en dos partes, A y B , de tal modo que *todo número racional pertenezca a una u otra parte, y que todo número de la primera, A , sea menor que cualquiera de los de la segunda, B* ; es decir, que A es el conjunto de todos los números racionales menores que r y B de los mayores que r ; en cuanto a r , lo mismo podemos incluirlo en A que en B ; siendo indiferente hacerlo de uno u otro modo. Al lado de estas *cortaduras*, que pudiéramos llamar *propias*, existen otras *impropias*, en las cuales *se agrupan todos los números racionales en dos clases con las dos propiedades características mencionadas, pero sin que haya un elemento racional que las separe*, es decir, que ni en la clase A hay un número máximo, ni en la B un mínimo. Un *ejemplo* de cortaduras impropias nos lo ofrece $\sqrt{2}=1,414\dots$, y en general, *cualquier fracción decimal aperiódica*; ya que, dado cualquier número racional, se puede en seguida afirmar si es mayor o menor que dicha fracción decimal, y formando la clase A con todos los números racionales menores que la fracción dada, y la B con los mayores, no habrá en A un número máximo, ni en B un mínimo; puesto que entre cualquier número racional y la fracción decimal dada hay infinitos números racionales.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, da Dedekind la siguiente *definición*, que, mirada desde un punto de vista puramente lógico, puede estimarse como *convenio arbitrario*. *Toda cortadura en el campo de los números racionales se llama número, racional o irracional, según que sea propia o impropia.*

A ésta se agrega inmediatamente una *definición de la igualdad*: *Dos números se dice que son iguales cuando proceden de la misma cortadura.*

Partiendo de esta definición se puede demostrar, por ejemplo, que $\frac{1}{3}$ es igual a la fracción decimal indefinida 0,333... Definidos del modo dicho los números irracionales, hay, en efecto, que demostrarlo, es decir, reducirlo a la definición últimamente dada, aunque, naturalmente, por lo simple de la cosa, parezca completamente innecesario. Por lo demás, esta demostración se deduce fácilmente observando que todo número racional inferior a $\frac{1}{3}$ es superado por una fracción decimal limitada que resulta de tomar en la dada un número suficiente de cifras; en tanto que ésta es siempre menor que cualquier número racional mayor que $\frac{1}{3}$.

En las lecciones de *Weierstrass* la definición se formula en la siguiente forma:

Dos números se llaman iguales cuando se diferencian en menos de cualquier cantidad dada, por pequeña que sea, cuya conexión con la anterior se ve inmediatamente.

Esta definición toma un carácter muy intuitivo, viendo por qué 0,999... es igual a 1. La diferencia es, en efecto, menor que 0,1, que 0,01, etc.; y por consiguiente, según la definición, es estrictamente igual a 0.

Si nos preguntamos ahora la razón de incluir estos números irracionales en el sistema de los números ordinarios y aun *calcular* con ellos, sin hacer salvedad alguna, habremos de acudir para encontrar la respuesta a la validez de las leyes de monotonía de las operaciones elementales. Resulta así este principio:

Cuando se han de sumar, multiplicar, etc., números irracionales, se les encierra entre números racionales, cuya diferencia puede llegar a ser tan pequeña como se quiera, y se efectúan con

estos números racionales las operaciones respectivas; y entonces, en virtud de la validez de las leyes de monotonía, el resultado está comprendido también entre números que llegan a diferir entre sí tan poco como se quiera.

No parece necesario entrar en más pormenores sobre estas cosas; puesto que existen actualmente muchos libros didácticos, entre ellos *Weber-Wellstein* y *Burkhardt*, en los que aparece expuesta esta materia con claridad y precisión, a ellos deben ustedes acudir para conocer con todo detalle la teoría que nos ocupa. En cambio creo de más interés fijarme en un aspecto de esta cuestión que no aparece tratado en la mayoría de los libros, a saber: *cómo puede pasarse de esta teoría aritmética de los números irracionales a sus aplicaciones*; de un modo particular se presenta a nuestra consideración en este punto la *Geometría analítica*, la que, por modo contrario, precisamente por la simple intuición, aparece como fuente de los números irracionales; siéndolo también desde un punto de vista psicológico, como ahora vamos a ver. Tomemos el eje de abscisas, sobre el cual están señalados el cero y los puntos racionales, y establezcamos la siguiente proposición preliminar en que se basa esta aplicación: *A todo número, racional o irracional, corresponde en el eje un punto cuya abscisa es aquel número; y recíprocamente, a todo punto de la recta le corresponde como abscisa un número, racional o irracional.*

Una proposición tal como esta que acabamos de enunciar, que se pone como base y fundamento de una disciplina, y de la cual se deriva lógicamente todo lo demás, mientras que ella misma no puede ser demostrada lógicamente, es lo que se llama un *axioma*, y aparece, según la manera de ser de cada matemático, ya como de *evidencia intuitiva*, o bien como un *convénio más o menos arbitrario*, que es preciso aceptar. El axioma que acabamos de enunciar sobre la correspondencia biunívoca entre los números reales por una parte y los puntos de la recta por otra, es conocido ordinariamente con el nombre de *Axioma de Cantor*, por ser *G. Cantor* el que primero lo enunció expresamente (*Mathem. Annal.* Tomo 5.º, 1872).

Llegamos ahora al momento de decir algo acerca de la *naturaleza de la intuición espacial*. Esta denominación corresponde

realmente a *dos cosas distintas*: una, *la intuición empírica, de percepción inmediata por los sentidos del espacio*, que podemos comprobar con la medida; y otra, *la idea abstracta del espacio*, que puede decirse que tenemos todos en nuestro interior y está por encima de todas las imperfecciones de la observación. Una diferencia análoga existe, en general, para toda concepción, como ya hemos tenido ocasión de observar al tratar de los fundamentos del concepto de número y que en aquel caso podía ponerse en evidencia con el siguiente ejemplo: La significación de un número pequeño como el 2, el 5 y aun todavía el 7, es para todos de inmediata evidencia; en tanto que, cuando se trata de números más grandes, por ejemplo, 2503, no tenemos ya noción inmediata de ellos; sino que se reemplaza esta noción por *la intuición innata de la serie ordenada de los números*, que formamos partiendo de los primeros números y aplicando el principio de inducción completa. En lo que respecta al espacio, si consideramos, por ejemplo, la distancia entre dos puntos, podemos valuarla con una *cierta exactitud*, pues nuestra vista no puede considerar como desiguales segmentos cuya diferencia queda por bajo de un cierto límite; tal es el caso de la *penumbra*, que en toda la Psicología desempeña papel de tanta importancia.

No se cambian los términos del problema porque reforcemos nuestra vista con los más poderosos instrumentos auxiliares; pues hay propiedades físicas que no permiten pasar de un cierto grado de exactitud. La óptica enseña, por ejemplo, que la longitud de onda de la luz, que como es sabido, varía con el color, es del orden de magnitud de $\frac{1}{1000}$ mm. (un micrón); muestra, además, que los objetos de dimensiones menores que ésta, no pueden ser vistos distintamente ni aun con el auxilio de los mejores microscopios, porque entonces sólo hay inflexiones de luz y no se forma ninguna imagen que reproduzca exactamente todos los pormenores.

La consecuencia de esto es la imposibilidad de medir con los recursos de la óptica, longitudes cuyo grado de exactitud pase del micrón; y por consiguiente, que al dar longitudes expresadas en milímetros, sólo pueden ser exactas las cifras hasta las milésimas inclusive; y del mismo modo en todas las observaciones y medi-

ciones físicas, hay que conformarse con ese grado de aproximación que marca un límite que no se puede superar. Los datos que traspasen estos límites carecen de sentido; son, únicamente, indicios de ignorancia o falta de probidad. Digamos, de paso, que tales exageraciones de exactitud en los números, se encuentran con bastante frecuencia en los anuncios de balnearios, en los que se da la composición química de sus aguas con un número de cifras decimales cuya exacta determinación, por medio de la balanza, es sencillamente imposible.

Frente a esta propiedad de la intuición empírica del espacio, que lleva consigo una exactitud limitada, tiene el *concepto abstracto o ideal del espacio una ilimitada exactitud, que conduce paralelamente a las definiciones aritméticas del concepto de número al axioma de Cantor.*

A este desdoblamiento de la intuición corresponde la división de la Matemática en dos partes: *Matemática de aproximación* y *Matemática de precisión*. Aclararemos esta distinción interpretando una ecuación: $f(x)=0$. En la Matemática de aproximación se trata, como en nuestra intuición empírica real, no de que el valor de $f(x)$ sea *exactamente* nulo, sino de que el valor absoluto de $f(x)$ esté *por bajo del límite de exactitud asequible*. La expresión $f(x)=0$ no es, pues, otra cosa que una manera abreviada de escribir la desigualdad $f(x)<\varepsilon$, que es lo que realmente se considera. La Matemática de precisión, en cambio, se ocupa del problema de satisfacer exactamente a la ecuación $f(x)=0$.

Como en las aplicaciones sólo interviene la Matemática de aproximación, se podría decir, forzando un poco la cosa, que *sólo se necesita de esta disciplina*, quedando la Matemática de precisión relegada a servir de distracción a los que la cultivan, y, todo lo más, a ser una base cómoda para el desarrollo de la Matemática de aproximación.

Volviendo a la cuestión que nos ocupaba, podemos, por consiguiente, decir que *el concepto de número irracional pertenece única y exclusivamente a la Matemática de precisión*. Pues la afirmación de que la distancia entre dos puntos es un número irracional de metros carece completamente de sentido, ya que, como hemos visto, todas las cifras decimales posteriores a la sexta no tienen ya significación real alguna. *En la práctica se pueden, por*

tanto, reemplazar, sin inconveniente alguno, los números irracionales por los racionales. Parece, sin embargo, una contradicción con esto, el hecho de que en Cristalografía se hable de la ley de índices racionales y de que en Astronomía se distinguen como casos esencialmente diferentes, si la razón de los tiempos de revolución de dos planetas es racional o irracional; pero esta aparente contradicción es sólo debida a la ambigüedad de algunas palabras de nuestro idioma; pues aquí las palabras racional e irracional tienen un sentido completamente diferente al empleado hasta ahora; un *sentido matemático aproximado*. Así entendido, al decir en Astronomía que dos magnitudes tienen una razón racional, quiere decirse que son entre sí como dos números enteros más pequeños, como $\frac{3}{7}$, por ejemplo, y, en cambio, una razón como $\frac{2021}{7053}$ se dice que es irracional; las magnitudes de numerador y denominador de ésta pueden ser diferentes y dependen del fin de la aplicación.

De todas estas interesantes relaciones me he ocupado en una de las lecciones del curso de verano de 1901, que fueron publicadas en 1902 y nuevamente impresas en 1907 bajo el título: *Anwendung der Differential-und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien* (Ausgab. v. C. H. Müller).

Para terminar, diré algo acerca de cómo creo que debe darse la enseñanza de esta teoría del número irracional en la escuela.

Se comprende, desde luego, que ni por la capacidad mental de los alumnos ni por el interés que en ellos pueda despertar, puede apenas darse entrada a esta teoría en la Escuela. El alumno deberá contentarse con calcular con un cierto grado de aproximación; una aproximación de 0,001 de mm. ya le dejará asombrado y seguramente no se le ocurrirá pretender alcanzarla ilimitada; claro es que habrá algunos muchachos mejor dotados que querrán penetrar algo más en esta cuestión, y entonces a la habilidad pedagógica del maestro queda dar satisfacción a este deseo, sin que padezcan los intereses de la mayoría.

CAPITULO III

DE LAS PROPIEDADES ESPECIALES DE LOS NUMEROS ENTEROS

Vamos a dedicar un nuevo capítulo a la *Teoría especial de los números enteros* o *Teoría de números*, o sea la *Aritmética en su sentido estricto*, y comenzaremos recordando las cuestiones relativas a esta ciencia que figuran en la enseñanza escolar.

1) El primer problema de la Teoría de números, la divisibilidad: ¿Es un número divisible por otro o no?

2) Se pueden dar reglas sencillas que permiten decidir *cuándo un número cualquiera es divisible o no por números pequeños, como 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, etc.*

3) Existen *infinitos números primos*, es decir, que *no tienen ningún divisor* (excepto la unidad y él mismo): 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

4) Se conoce todo lo relativo a la divisibilidad de números cualesquiera, cuando se conoce su *descomposición en factores primos*.

5) En la transformación de quebrados racionales en decimales desempeña la teoría de números un gran papel; muestra por qué en ciertos casos debe ser *periódica* la fracción decimal y cuántas cifras debe tener su período.

Toda esta materia se trata en las clases Quinta y Cuarta; después sólo esporádicamente aparece la Teoría de números, de la que se tratan los siguientes puntos:

1) Fracciones continuas, aunque no se hable de ellas en todas las escuelas.

2) Algunas veces se estudian las *ecuaciones diofánticas*, que son ecuaciones con varias incógnitas a las que se impone la condición de que sólo puedan tomar valores enteros. Ejemplo de tales ecuaciones son las que dan los *números pitagóricos*, de los

que antes (pág. 44) se habló incidentalmente ; como es sabido, el problema que resuelven es el de encontrar las *ternas de números enteros* que verifican la ecuación :

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

3) En íntima relación con la Teoría de números está también el problema de la *división de la circunferencia*, aunque esta conexión casi nunca puede ser explicada en la escuela. La división de la circunferencia en n partes iguales *empleando solamente la regla y el compás*, se realiza fácilmente para $n=2, 3, 4, 5, 6$, pero para $n=7$ es ya imposible, y en la escuela ya no se trata este caso, y, mucho menos, se habla de modo explícito de tal imposibilidad, cuya demostración exige conocimientos profundos de Teoría de números. Para evitar malas inteligencias que desgraciadamente se producen con mucha frecuencia, adviértase que se trata aquí de un *problema de matemática de precisión*; que pierde toda importancia cuando se trata de aplicaciones prácticas.

En tales casos, ocurrirá a veces que, aun siendo posible una construcción «exacta» apenas se utilice ; sino que se prefiere proceder como en la matemática de aproximación, por medio de tanteos, con los cuales se llega a dividir el círculo en un número cualquiera de partes iguales, logrando cómodamente toda la exactitud práctica posible. Así proceden, naturalmente, todos los mecánicos que se ocupan en la construcción de instrumentos de los que forman parte círculos graduados.

9) Todavía hay un punto de la Teoría de números que merece una gran atención en la escuela, a saber : el *cálculo de π* , que entra en el problema de la *cuadratura del círculo*. Suelen calcularse por un procedimiento cualquiera las primeras cifras decimales de π , y se cita, sin agregar más, *la moderna demostración de la trascendencia de π que resuelve en sentido negativo el antiguo problema de la cuadratura del círculo con regla y compás*.

Más tarde, al final del curso, expondremos detalladamente esta demostración ; limitándonos aquí a formular de un modo exacto esta proposición diciendo : *el número π no puede ser raíz de ninguna ecuación algebraica de coeficientes enteros*,

$$a \pi^n + b \pi^{n+1} + \dots + k \pi + 1 = 0;$$

la condición de ser enteros los coeficientes es esencial y por ello precisamente corresponde el problema a la teoría de números.

Naturalmente, se trata aquí, en último término, de una *cuestión de matemática de precisión*; pues sólo en ella tiene significación el carácter de la naturaleza numérica; al matemático práctico le basta la determinación de las primeras cifras decimales, que le permiten realizar prácticamente la cuadratura del círculo con toda la exactitud posible.

Con lo expuesto queda ya precisada la posición que la Teoría de números ocupa en la escuela; y aun resta ver cómo se halla en la *enseñanza universitaria* y en la *investigación científica*. Pudieran clasificarse en dos grupos todos los matemáticos que trabajan independientemente en sus investigaciones, según su actitud con respecto a la Teoría de números: el grupo que podría llamarse de los *entusiastas* y el de los *indiferentes*. Para los primeros, no hay ninguna ciencia que sea tan bella y tan importante y que contenga demostraciones tan claras y precisas y teoremas tan rigurosos como la Teoría de números; «si la Matemática es la reina de las ciencias, la Teoría de números es la reina de la Matemática», dice Gauss. Para los indiferentes queda esta teoría muy apartada; se preocupan muy poco de su desarrollo, y la dejan de lado en todas sus investigaciones. La mayoría de los estudiantes observan conducta que coincide con esta segunda dirección.

La razón de esta singular división, creo haberla hallado en lo siguiente: Por una parte, la *Teoría de números es fundamental para todas las investigaciones matemáticas profundas*; con extraordinaria frecuencia tropiézase con ella partiendo de regiones completamente distintas, aun de cuestiones aritméticas sencillas. Por otro lado, la *Teoría de números pura es una cosa sumamente abstracta* y es poco frecuente estar dotado de aptitudes que permitan trabajar a gusto en el dominio de lo abstracto. Por esto yo creo que *la Teoría de números sería mucho más asequible y despertaría mucho mayor interés, si fuese expuesta utilizando elementos intuitivos y figuras apropiadas*, porque aun cuando sus proposiciones son lógicamente independientes de estos medios auxiliares, se facilitaría mucho su comprensión con tales recursos.

Esto he intentado en mis lecciones de los años 1895 y 96 (1) y cosa análoga se ha propuesto *H. Minkowski* en su obra *Diophantische Approximationen* (2). Mi curso tiene el carácter de una introducción elemental de esta teoría, mientras Minkowski aborda en seguida de lleno el estudio de problemas especiales desarrollados profundamente.

En lo que respecta a *Tratados didácticos de Teoría de números*, basta lo que encontrarán esparcido en las obras de Algebra. Entre los numerosos libros dedicados exclusivamente a esta teoría puede señalarse el pequeño libro de Bachmann titulado «*Grundlagen der neueren Zahlentheorie*» (1).

Entrando ya en el examen de las materias especiales de la Teoría de números enumeradas al comienzo de este capítulo, procuraremos hacerlo del modo más intuitivo posible; tratando, naturalmente, lo que *conviene que sepan los maestros*, pero de ningún modo en la forma en la cual podrían comunicar estos conocimientos a sus discípulos.

La necesidad de tales explicaciones me la revela la *experiencia de los exámenes*, que muestran que en esta teoría los conocimientos de los examinados, aspirantes al magisterio, se reducen con frecuencia a cosas sueltas, sin que en el fondo pueda percibirse ningún conocimiento concreto de la materia. Cualquier candidato dice que π es un número trascendente; pero son muy pocos los que saben el significado de este calificativo; ¡ algunas veces se oye decir que número trascendente es el que no es racional, ni irracional! Asimismo, he encontrado muchas veces candidatos que saben bien que hay infinitos números primos, pero sin que tengan idea de la demostración, a pesar de su sencillez.

Voy a empezar, en efecto, con esta demostración; pues sumpongo a todos en posesión de los conocimientos que abarcan los puntos 1) y 2) de nuestra enumeración.

Débase esta demostración a Euclides, cuyos *Elementos* (en griego *στοιχεα*) no sólo contienen la Geometría sistematizada sino

(1) *Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie* (Ausz. v. A. Sommerfeld und Ph. Furtwängler). Reimpresión en Leipzig, 1907.

(2) Con un apéndice: *Eine Einführung in die Zahlentheorie*, Leipzig, 1907.

(1) Sammlung Schubert, tomo LIII. Leipzig, 1907.

también *diversas cuestiones aritméticas y algebraicas en lenguaje geométrico*. La demostración de Euclides de la existencia de infinitos números primos procede así: Si la sucesión de los números primos fuese finita, por ejemplo, la 1, 2, 3, 5, ..., p el número $N=(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p)+1$, que no es divisible por 2, ni por 3, 5, ..., ni finalmente, por p , ya que todas estas divisiones dan de residuo 1, sería un número primo o habría un número primo distinto de los 2, 3, ..., p y, por consiguiente, mayor; y en ambos casos el resultado está en contradicción con la hipótesis.

En lo que se refiere al *cuarto punto, la descomposición de los números en sus factores primos*, conviene mencionar la *tabla de factores primos* de Chernac, *Cribum arithmeticum* (1), una de las más antiguas y muy notable, que desde el punto de vista histórico tiene un valor tanto más grande cuanto que es exacta en alto grado. El nombre de tabla viene unido al de criba de Eratóstenes desde la antigüedad: Tiene como fundamento el hecho de que separando sucesivamente de la serie de todos los números los que son divisibles por 2, 3, 5, ..., quedan, por último, solamente los números primos.

Chernac da la descomposición en factores primos de todos los números no divisibles por 2, 3 ó 5, hasta 1 020 000; todos los números primos contenidos en la tabla están subrayados, de modo que por esto puede decirse que es la primera tabla que da los números primos menores que 1 020 000.

Después, en el siglo XIX, se ha proseguido el cálculo de los números primos llegando hasta el noveno millón.

Entremos a considerar el *quinto punto, la transformación de los quebrados ordinarios en decimales*. Una teoría acabada de esta transformación puede hallarse en la obra ya citada de Weber-Wellstein. Aquí vamos a limitarnos a explicar el fundamento, valiéndonos de un ejemplo sencillo y típico.

Consideremos el quebrado $\frac{1}{p}$, siendo p un número primo distinto de 2 y 5; y vamos a probar que $\frac{1}{p}$ es igual a una fracción decimal periódica indefinida, y que el número de cifras δ de su período es el menor exponente para el cual 10^δ , dividido por p ,

(1) Daventriae, 1811.

da resto 1, o, como se dice en la teoría de números, δ es el menor exponente que satisface a la congruencia.

$$10^\delta \equiv 1 \pmod{p.}$$

La demostración exige, en primer término, el conocimiento de que esta congruencia es siempre resoluble, lo que nos da inmediatamente la conocida proposición de Fermat de que para todo número primo, p , distinto de 2 y 5 es

$$10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p.}$$

Prescindimos de la demostración de esta proposición fundamental que constituye uno de los instrumentos de mayor uso para todo matemático y tomamos esta propiedad de la teoría de números. El número exponente buscado δ es $p-1$, o un divisor de $p-1$.

Aplicando ésto a p , tenemos que $\frac{10^\delta - 1}{p}$ es un número entero N , y, por consiguiente, que

$$\frac{10^\delta}{p} = \frac{1}{p} + N$$

Al convertir $\frac{10^\delta}{p}$ y $\frac{1}{p}$ en fracción decimal, deben, pues, ser idénticas las cifras decimales correspondientes, por ser su diferencia un número entero; y puesto que $\frac{10^\delta}{p}$ se deduce de $\frac{1}{p}$ corriendo la coma hacia la derecha δ lugares, resulta que las cifras decimales de $\frac{1}{p}$ quedan invariables en esta operación, es decir, que la fracción decimal del quebrado $\frac{1}{p}$ está formada por repetición indefinida del mismo «período» de δ cifras.

Para reconocer que no puede darse un período cuyo número de cifras sea $\delta' < \delta$, basta probar que el número de cifras δ' de todo período debe satisfacer a la congruencia $10^{\delta'} \equiv 1$; puesto que sabemos que δ es la solución más pequeña de esta congruencia. Esta demostración se reduce a una sencilla inversión de la

marcha del razonamiento ya expuesto: De la hipótesis hecha se sigue que $\frac{1}{p}$ y $\frac{10^{\delta'}}{p}$ tienen iguales las partes decimales; por consiguiente, $\frac{10^{\delta'}}{p} - \frac{1}{p}$ es igual a un número entero, y, por tanto, $10^{\delta'} - 1$ es divisible por p ; luego $10^{\delta'} \equiv 1 \pmod{p}$; quedando con esto acabada la demostración.

He aquí algunos ejemplos instructivos, lo más sencillos posibles, en los cuales se ve que realmente δ puede tomar los valores más diferentes menores e iguales a $p-1$.

Consideremos, primeramente, la fracción

$$\frac{1}{3} = 0,33 \dots;$$

aquí $\delta=1$; y, en efecto, es $10^1 \equiv 1 \pmod{3}$. Para

$$\frac{1}{11} = 0,0909$$

es $\delta=2$, y, en consecuencia, $10 \equiv 10$, $10^2 \equiv 1 \pmod{11}$. El máximo valor $\delta=p-1$ aparece en la fracción

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857 \dots$$

donde $\delta=6$; en efecto, se verifican las siguientes congruencias, $10 \equiv 3$, $10^2 \equiv 2$, $10^3 \equiv 6$, $10^4 \equiv 4$, $10^5 \equiv 5$ y $10^6 \equiv 1 \pmod{7}$.

Entremos, ahora, en el sexto punto de nuestra enumeración: *las fracciones continuas*. No daremos aquí la exposición usual, aritmética o abstracta, que puede verse, por ejemplo, en la obra ya citada de Weber-Wellstein; sino que veremos, con este motivo, cómo puede obtenerse con una *exposición geométrica intuitiva* una visión clara y fácilmente comprensible de cuestiones de la Teoría de números, siendo de advertir que al hacerlo así, nos limitamos a volver al camino seguido por Gauss y Dirichlet, sólo abandonado por los modernos matemáticos hacia 1860.

Naturalmente, nos limitaremos aquí a indicar en líneas generales lo más importante y dar teoremas sin detenernos a demostrarlos, suponiendo que el lector conoce suficientemente la teoría

elemental de las fracciones continuas. Una exposición detallada de la misma puede verse en mis lecciones autografiadas de la Teoría de números.

Ya sabemos cómo se desarrolla un número racional positivo en fracción continua; designando por u_0 el mayor entero contenido en w , es

$$w = u_0 + r_0, \quad (0 \leq r_0 < 1);$$

operando con $\frac{1}{r_0}$ lo mismo que con w , será

$$\frac{1}{r_0} = u_1 + r_1, \quad (0 \leq r_1 < 1)$$

y así siguiendo

$$\frac{1}{r_1} = u_2 + r_2, \quad (0 \leq r_2 < 1),$$

$$\frac{1}{r_2} = u_3 + r_3, \quad (0 \leq r_3 < 1),$$

.....

Este algoritmo termina después de un cierto número de operaciones, cuando w es racional; y, en caso contrario, prosigue indefinidamente. En todo caso podemos escribir abreviadamente como desarrollo de w en fracción continua:

$$w = u_0 + \frac{1}{u_1 + \frac{1}{u_2 + \frac{1}{u_3 + \dots}}}$$

Como ejemplo de un desarrollo en fracción continua ilimitada, tenemos:

$$\pi = 3,14159265 \dots = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{192 + \dots}}}$$

Cuando suprimimos en la fracción continua todos los denominadores que siguen al 1.º, 2.º, 3.º, ..., se obtienen fracciones

$$u_0 = \frac{p_0}{q_0}, \quad u_0 + \frac{1}{u_1} = \frac{p_1}{q_1}, \quad u_0 + \frac{1}{u_1 + \frac{1}{u_2}} = \frac{p_2}{q_2} \dots$$

que dan valores de aproximación extraordinariamente buena de w , porque—dicho con mayor precisión—cada uno de ellos da la mayor aproximación que es posible alcanzar con quebrados del mismo o menor denominador.

Esta propiedad da una gran importancia práctica a la teoría de las fracciones continuas siempre que convenga expresar con la mayor aproximación posible por medio de *fracciones lo más simples posible*—es decir, con fracciones de denominador mínimo—números irracionales o quebrados de términos bastante grandes (por ejemplo, quebrados decimales de muchas cifras). Comparando la expresión en fracción decimal de $\pi = 3,14159265 \dots$ con los valores de las primeras reducidas de su desarrollo en fracción continua :

$$\frac{p_0}{q_0} = 3, \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7} = 3,14285, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106} = 3,141509 \dots ;$$

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{355}{113} = 3,14159265 \dots$$

se ve la gran aproximación de éstas al verdadero valor.

Se observa, además, en este ejemplo, que estos valores aproximados son alternativamente más pequeños y mayores que π ; propiedad como es sabido, de carácter general: *el desarrollo de un número cualquiera w en fracción continua, da valores alternativamente menores y mayores que w y que cada vez difieren menos entre sí.*

Una representación geométrica pone muy bien de manifiesto cuanto decimos.

Fijémonos para ello en el cuadrante de coordenadas positivas del plano xy —ya que nos limitaremos a considerar números positivos—, y señalemos *todos los puntos cuyas coordenadas sean*

números enteros, los cuales forman lo que llamaremos una red de puntos. Fijémonos en esta red, que casi me atrevería a llamar «cielo estrellado» de puntos, vista desde el origen de coordena-

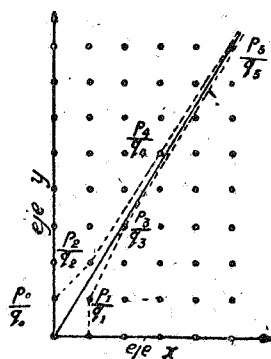


Figura 6

das ; el radio vector que va de 0 al punto $(x=a, y=b)$ tiene por ecuación

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

y recíprocamente, sobre toda recta como éstas: $\frac{x}{y} = \lambda$, siendo λ racional $= \frac{a}{b}$, hay infinitos puntos de coordenadas enteras $(m \cdot a, m \cdot b)$ donde m es un número entero cualquiera.

Resulta, pues, que mirando desde 0, en todas las *direcciones racionales*, y sólo en ellas se ven puntos de la red considerada ; que el campo de visión es denso en todas partes, pero no está lleno de un modo completo y continuo de estrellas, sino que podría compararse a la *vía láctea*. *Sobre todo rayo irracional* $\frac{x}{y} = w$, donde w es irracional, no hay, por consiguiente, aparte el punto 0, ningún punto de coordenadas enteras, resultado digno de anotarse.

Recordando la definición dada por Dedekind, diremos que cada una de dichas rectas establece una *cortadura en el campo de los puntos de coordenadas enteras*, puesto que separa el con-

junto de puntos situado a su derecha del de su izquierda. Si ahora pretendemos ver la forma en que ambos conjuntos están limitados por la recta $\frac{x}{y} = w$ se obtiene una interesantísima relación con el desarrollo en fracción continua de w . Marquemos para toda reducida $\frac{p_r}{q_r}$ el punto correspondiente (p_r, q_r) , siendo los términos p_r y q_r primos entre sí; entonces los rayos que desde 0 proyectan estos puntos se aproximan cada vez más al rayo $\frac{x}{y} = w$ y alternativamente por uno y otro lado en la misma medida en que las fracciones $\frac{p_r}{q_r}$ se aproximan al valor w ; y recurriendo a las propiedades bien conocidas de los pares de números p_r, q_r se encuentra el siguiente teorema: *Si se imaginan clavados alfileres en todos los puntos de coordenadas enteras, algo así como es el llamado billar chino, y ligamos los conjuntos de alfileres situados a uno y otro lado de la recta $\frac{x}{y} = w$ por un hilo que se mantenga tirante, los vértices de los polígonos convexos que forman los hilos son, precisamente, los puntos (p_r, q_r) que tienen por coordenadas los numeradores y denominadores de las sucesivas reducidas de la fracción continua que representa w , siendo los vértices del polígono situados a la izquierda los correspondientes a las reducidas de índice par y los del de la derecha a las de índice impar.*

Se obtiene así una nueva definición geométrica eminentemente intuitiva del desarrollo en fracción continua.

La figura adjunta corresponde al caso de ser:

$$w = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

es decir, al lado irracional del decágono regular; los primeros vértices de ambos polígonos son:

izquierda: $p_0=0, q_1=1; p_2=1, q_2=2; p_4=3, q_4=5 \dots$

derecha: $p_1=1, q_1=1; p_3=2, q_3=3; p_5=5, q_5=8 \dots$

Para π , los valores de p_r y q_r crecen mucho más rápidamente, de modo que apenas puede dibujarse la figura correspondiente, si no es con dimensiones muy grandes. La demostración del teorema que acabamos de enunciar puede verse circunstanciadamente en mis lecciones autografiadas, de que ya queda hecha mención.

Vamos a tratar, ahora, el punto séptimo, los *números pitagóricos*, utilizando la intuición espacial en una forma algo diferente. En lugar de la ecuación

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad [1]$$

cuyas soluciones enteras se trata de hallar, consideraremos la ecuación

$$\xi^2 + \eta^2 = 1 \quad [2]$$

que se deduce de la [1] poniendo

$$\frac{a}{c} = \xi, \quad \frac{b}{c} = \eta \quad [3]$$

con lo cual el problema queda reducido a determinar todos los *pares de números racionales* (ξ, η) que satisfacen a la [2]. Partimos de la representación geométrica de *todos los puntos racionales* (ξ, η) , es decir, de todos los puntos de coordenadas racionales ξ y η que llenan el plano $\xi\eta$ densamente en todas sus partes. La ecuación $\xi^2 + \eta^2 = 1$ representa, en este plano, el *círculo unidad*, cuyo centro es el origen, de modo que nuestro problema se reduce al de ver *cómo va pasando esta circunferencia entre los puntos racionales cuyo conjunto es denso en todas partes, y, en particular, cuáles de estos puntos contiene*. Algunos de estos puntos son conocidos, desde luego, los puntos de intersección con los ejes; entre ellos vamos a fijarnos especialmente en el $S(\xi = -1, \eta = 0)$.

Imaginemos todos los rayos que parten de S, los cuales están representados por la ecuación [4]

$$\eta = \lambda(\xi + 1)$$

y llamémoslos *racionales* o *irracionales*, según que el valor del

parámetro correspondiente λ sea o no racional ; se verifica entonces el siguiente doble teorema : *Todo punto racional de la circunferencia se proyecta desde S según un rayo racional ; y recíprocamente, todo rayo racional que parte de S corta a la circunferencia en un punto racional.*

El teorema directo es inmediato. El recíproco se demuestra

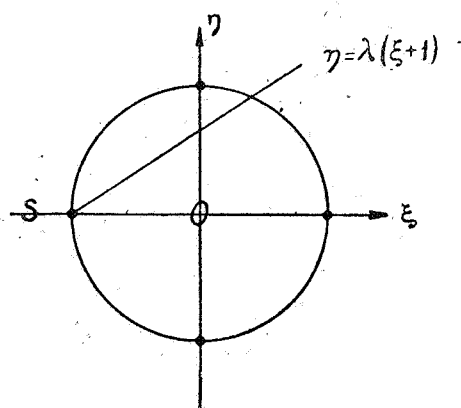


Figura 7

por cálculo directo substituyendo en la ecuación [2] el valor de η dado por la [4] ; se obtiene así la abscisa del punto de intersección resolviendo la ecuación :

$$\xi^2 + \lambda^2(\xi^2 + 1)^2 = 1,$$

o sea

$$(1 + \lambda^2)\xi^2 + 2\lambda^2\xi + \lambda^2 - 1 = 0.$$

Una solución, $\xi = -1$, de esta ecuación es la ya conocida, correspondiente a la intersección S ; el valor de la otra se deduce por un pequeño cálculo,

$$\xi = \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \quad [5^a]$$

y substituyéndolo en [4] se obtiene la ordenada, correspondiente

$$\eta = \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2}; \quad [5^b]$$

y estas expresiones demuestran que, en efecto, el segundo punto de intersección es racional si corresponde a un valor racional de λ .

Los dos teoremas, directo y recíproco, que acabamos de demostrar, pueden enunciarse también así: *Todos los puntos racionales de la circunferencia están representados por las fórmulas [5] en las que λ puede tomar cualquier valor racional.* Con esto queda resuelto el problema en cuestión y sólo falta pasar a los números enteros.

Para ello ponemos:

$$\lambda = \frac{n}{m},$$

donde n , m designan números enteros y sustituyendo en las fórmulas [5], se obtiene:

$$\xi = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}, \quad \eta = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$$

como conjunto de todas las soluciones racionales de la ecuación [2]. Por consiguiente, todas las soluciones enteras de la primitiva ecuación [1], es decir, *todos los números pitagóricos están dados por las siguientes fórmulas:*

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

obteniéndose todas las soluciones compuestas de números primos entre sí, cuando se atribuyen a m y n todos los pares de números primos entre sí. Tenemos, pues, con esto una deducción muy intuitiva de este resultado que de otro modo hubiera parecido muy abstracto.

Para terminar, hablaremos algo acerca del «gran teorema de Fermat». De antiguo han tratado los geómetras de generalizar los números pitagóricos extendiendo la cuestión al espacio de tres o más dimensiones, dando así origen a este problema: ¿Es posible que la suma de los cubos de dos números sea el cubo de otro, o que la suma de las cuartas potencias dé una cuarta potencia y así sucesivamente? O sea, en general: ¿*Tiene soluciones enteras la ecuación*

$$x^n + y^n = z^n \quad [6]$$

suponiendo que n sea un número entero cualquiera? Tal pregunta ha sido contestada negativamente por Fermat, enunciando el teorema que lleva su nombre:

La ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones enteras para ningún valor entero de n , excepto para $n=2$.

Antes de entrar de lleno en esta cuestión, permítasenos dar algunos datos históricos. Fermat vivió desde 1601 hasta 1665 y fué jurisperito y miembro del Consejo del parlamento de Toulouse; pero se ocupó mucho y con gran fruto en cuestiones matemáticas, mereciendo que se le cuente entre los más grandes matemáticos. El nombre de Fermat ocupa un lugar preeminente entre los de los fundadores de la Geometría analítica, del Cálculo infinitesimal y del Cálculo de probabilidades; sin embargo, sus más importantes investigaciones pertenecen a la Teoría de números.

Todos los resultados a que llegó en esta Teoría, los dejó en forma de notas puestas al margen de un ejemplar de las obras de *Diofanto*, matemático de la antigüedad que tanto se ocupó en la Teoría de números, y vivió, probablemente 300 años antes de J. C., o sea unos 600 años después de Euclides, en Alejandría. Fermat no dió luz ninguna de sus investigaciones, que sólo fueron conocidas por la valiosa correspondencia cruzada con los personajes de su tiempo y porque cinco años después de su muerte su hijo publicó las notas a la obra de Diofanto, entre las cuales figura el llamado gran teorema, que ahora nos ocupa, del cual decía Fermat: «he encontrado una demostración realmente admirable, pero el margen es muy pequeño para ponerla» (1). Hasta hoy no se ha logrado encontrar una demostración de este teorema.

Para orientarnos mejor en el contenido de este teorema, comencemos, como en el caso de ser $n=2$, por ver las soluciones racionales de la ecuación

$$\xi^n + \eta^n = 1,$$

o, dicho de otro modo, por ver qué posición ocupa la línea representada por esta ecuación, respecto del conjunto de los puntos

(1) Véase la edición publicada por la Acad. de Ciencias de París: *Oeuvres de Fermat*, t. I. (París 1891), pág. 291 y t. III (1896), pág. 241.

racionales del plano $\xi\eta$. Para $n=3$ y $n=4$, la curva tiene las formas que, aproximadamente, se representan en la figura :

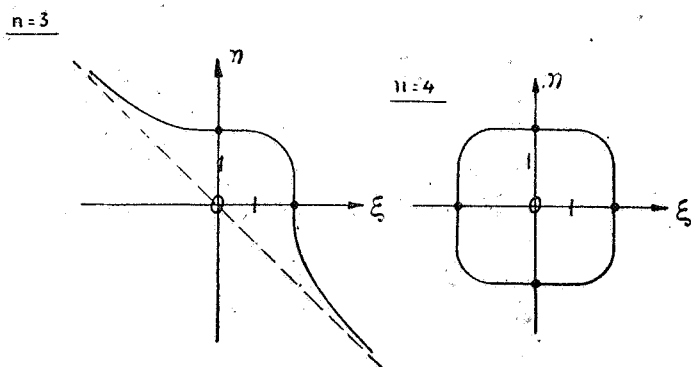


Figura 8

La primera contiene, desde luego, los puntos $\xi=0, \eta=1$ y $\xi=1, \eta=0$; y la segunda los $(0, \pm 1), (\pm 1, 0)$, y el teorema de Fermat dice que, contrariamente a lo que ocurría en el caso del círculo unidad, estas líneas pasan a través del conjunto, denso en todas partes, de los puntos racionales, sin pasar una sola vez por ninguno de ellos.

El interés que despierta este teorema radica, principalmente, en que *todos los esfuerzos realizados para demostrarlo han sido infructuosos*. Entre los que han intentado la demostración merece ser señalado de manera especial *Kummer*, que ha dado un considerable avance en el problema, relacionándolo con la teoría de los números «algebraicos», y, muy en particular, con la teoría de los números «divisores de la circunferencia». Sirviéndose de la n -sima raíz de la unidad,

$$= e^{\frac{2i\pi}{n}}$$

se puede, en efecto, descomponer $x^n - y^n$ en factores lineales, con lo cual la ecuación de Fermat toma la forma

$$x^n = (z-y)(z-\varepsilon y)(z-\varepsilon^2 y) \dots (z-\varepsilon^{n-1} y),$$

es decir, la n -sima potencia del número entero x debe descomponerse en n factores constituídos por dos números enteros y, z

y el ϵ en la forma indicada. Kummer construyó para tales números teorías análogas a las que de muy antiguo se conocen para los enteros ordinarios, basadas en los conceptos de divisibilidad, descomposición en factores, etc. ; y así se habla de *números algebraicos enteros* y para éstos, especialmente, de *números divisores de la circunferencia*, por la relación del número ϵ con el problema de división de la circunferencia en partes iguales. *El teorema de Fermat es, pues, para Kummer un teorema sobre descomposición factorial en el campo de los números algebraicos divisores de la circunferencia* y en la teoría de éstos buscó el fundamento para la demostración del célebre teorema, y, en efecto, logró darla para un gran número de valores de n ; desde luego, para todos los inferiores a 100 ; para los mayores que 100, hay *valores excepcionales* para los que ni Kummer ni ninguno de los matemáticos posteriores han podido dar la anhelada demostración. Datos más completos acerca del actual estado del problema pueden verse en la Enciclopedia matemática, tomo I, 2, pág. 714, al final del artículo de Hilbert sobre «*Theorie der algebraischen Zahlkörper*». El mismo Hilbert ha continuado y extendido las investigaciones de Kummer.

No es de creer que Fermat haya encontrado su «admirable demostración» siguiendo este camino ; pues no es muy probable que pudiera hablarse de números algebraicos en una época en que, seguramente, nada claro se sabía acerca del imaginarismo y en que la propia teoría de números estaba por hacer, siendo precisamente Fermat quien le dió gran impulso. Por otra parte, no es de creer tampoco que un matemático de la talla de Fermat haya dado una demostración errónea, aunque también se encuentran errores entre los grandes matemáticos. Hay, pues, que pensar que llegó a la demostración por una sencilla idea feliz, pero como no existe la menor indicación acerca de la dirección en que podría buscarse tal idea, se concluye que, *probablemente, sólo puede esperarse una demostración completa del teorema de Fermat, de una continuación sistemática de los trabajos de Kummer.*

Estos problemas gozan desde hace algunos años, de la atención de bastantes investigadores ; puesto que, como es sabido, la Academia de Ciencias de Gotinga está encargada de otorgar un premio de 100 000 marcos para el que demuestre el teorema de

Fermat, premio concedido por legado de un matemático de Darmstadt, *Wolfshehl*, muerto en 1906, y que probablemente debió de consagrar gran parte de su vida al problema, y ha dejado parte de sus bienes para el afortunado que demuestre en general la proposición de Fermat o presente un ejemplo en que no sea cierta, cosa esta última nada sencilla, porque demostrado ya el teorema para los exponentes inferiores a 100, el que pretenda lograrla tendrá que comenzar sus cálculos con números extremadamente grandes.

Lo que hemos dicho permite adivinar lo difícil que debe parecerle alcanzar tal premio al matemático que conoce esta materia y los esfuerzos de Kummer y sus sucesores en sus tentativas de demostración, pero el *gran público* no es, indudablemente, de la misma opinión. Desde últimos del verano de este año corrió por los periódicos la noticia de este Premio (noticia, para cuya publicación, no estaban por cierto autorizados) y nos han llegado ya una enormidad de «demostraciones». Gentes de todas las profesiones, ingenieros, maestros de escuela, clérigos, un banquero, muchas señoras, etc., han participado en estas comunicaciones. Sólo una cosa de común se observa en todos ellos: que *no tienen idea de la gran importancia matemática del problema*, ni aún siquiera han procurado informarse previamente del asunto, sino que han creído que con una repentina ocurrencia podía resolverse la cuestión, lo que, naturalmente, es absurdo. No puedo sustraerme a la tentación de dar a conocer un ejemplo característico de este caos de disparates. Un señor que desconoce el signo > lee en lugar de

$$x^n + y^n = z^n (n > 2),$$

lo siguiente

$$x^n + y^n = 2^n \cdot (n + 2),$$

y naturalmente, ya para $n=1$, es decir, para $x+y=3z$ puede dar inmediatamente soluciones; y el hombre envía ésto y tiene a los matemáticos por tan estúpidos que por tan poca cosa otorguen un premio de 100 000 marcos.

Ponemos punto a todo lo relativo al Teorema de Fermat y pasamos a la *octava cuestión* de nuestro programa, al *problema de la división del círculo*.

Aunque más adelante hemos de ocuparnos detenidamente en cuanto se refiere a la exposición sistemática de las operaciones con los números complejos y su representación geométrica en el plano completo xy , lo suponemos, desde luego, conocido de todos. Se trata ahora del *problema de dividir la circunferencia en n partes iguales* o de *construir un polígono regular de n lados*. Podemos, naturalmente, limitarnos a considerar el círculo unidad cuyo centro es el punto O del plano complejo y tomar el punto $x+iy=1$ como el primero de los n puntos de división; entonces los números complejos correspondientes a los n vértices

$$z = x + iy = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} = e^{\frac{2k\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

según el teorema de Moivre satisfacen a la ecuación:

$$z^n = 1,$$

con lo cual *el problema de la división del círculo queda reducido a la resolución de esta sencilla ecuación algebraica.*

Puesto que esta ecuación admite siempre la raíz racional $z=1$, es z^n-1 divisible por $z-1$, y las $n-1$, raíces restantes son las de la llamada ecuación *ciclotómica*:

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z^2 + z + 1 = 0,$$

la cual es de grado $n-1$ y con todos los coeficientes iguales a 1.

Desde la antigüedad ha sido objeto de estudio para los matemáticos averiguar: *Qué polígonos regulares se pueden construir con el solo uso de la regla y del compás.* Era ya conocido de los antiguos la posibilidad de la solución cuando el número de vértices es: $n=2^h \cdot 3 \cdot 5$ (siendo h un entero cualquiera) y también para los valores compuestos $n=2^h \cdot 3$, $n=2^h \cdot 5$, $n=2^h \cdot 3 \cdot 5$, pero en ese punto se estancó el problema hasta después del siglo XVIII en que el joven matemático Gauss empezó a ocuparse con él y encontró que *el problema de la división del círculo en p partes iguales es posible siempre que p es un número primo de la forma*

$$p = 2^{(2^p)} + 1$$

y sólo en este caso. Para los primeros valores $p=0, 1, 2, 3$, de esta fórmula se obtienen, en efecto, los números primos:

3, 5, 17, 257;

de ellos, los dos primeros son casos ya conocidos, en tanto que los otros dos corresponden a casos esencialmente nuevos. Particularmente famoso es el del *pentadecágono regular* cuya construcción con la regla y el compás fué demostrada primeramente por Gauss. Por lo demás, no se conoce, en general, para qué valores de p da números primos la fórmula antes puesta. Tampoco aquí vamos a entrar en pormenores, sino que nos limitaremos a indicar los recursos generales y la significación que encierra este descubrimiento, remitiéndonos para un estudio más completo del pentadecágono regular a la obra ya citada de Weber-Wellstein.

Es digno de ser leído el *diario de Gauss* que aparece impreso en el tomo 57 de la revista *Mathematischen Annalen* (1903); es un pequeño cuaderno, en apariencia insignificante, que Gauss empezó a escribir en 1796, poco antes de cumplir los 19 años, y precisamente la primera nota que en él se registra, se refiere a la posibilidad de la construcción del pentadecágono regular (marzo, 1796); este precoz e importante descubrimiento fué el que decidió a Gauss a dedicarse definitivamente a la matemática. Todo matemático debiera hojear este diario que le habría de interesar en alto grado, ya que en él pueden seguirse paso a paso los notabilísimos trabajos de Gauss en Teoría de números, funciones elípticas, etc.

Este primer gran descubrimiento de Gauss fué publicado en una breve comunicación en el *Jenaer Literaturzeitung* del 1.º de julio de 1796, gracias al maestro y protector de Gauss, el consejero de la Corte *Zimmermann*, de Brunswick, y acompañada de una breve nota personal del mismo (1). La demostración la publicó Gauss por primera vez, en una memoria fundamental para la Teoría de números *Disquisitiones arithmeticae* en el año 1801; allí se encuentra también por primera vez la parte negativa de la cuestión de que carecía aquella nota, es decir, que *para números primos no contenidos en la fórmula $2^{(2^p)} + 1$ no puede realizarse la construcción con el solo uso de la regla y del compás.*

(1) Publicada también en *Math. Ann.*, 57 (1903), pág. 6.

Aquí presentaremos un ejemplo de esta importante *demonstración de imposibilidad*; con tanta mayor razón cuanto que en el gran público *existe una casi total incomprensión de tal clase de demostraciones*. La moderna matemática ha podido dar solución con ellas a una serie de problemas famosos contra los cuales venían estrellándose desde la antigüedad todos los esfuerzos de los matemáticos empeñados en su resolución; al lado del eptágono regular pueden citarse, entre otros, los de la *trisección del ángulo* y la *cuadratura del círculo*, con regla y compás. A pesar de ello, sigue habiendo todavía gentes ocupadas en estos problemas, desprovistas de conocimientos matemáticos superiores, ignorantes de la existencia de estas demostraciones de imposibilidad e incapaces de comprenderlas.

Tales gentes, con arreglo a sus conocimientos, que se limitan generalmente a la Geometría elemental, tratan de resolver estas cuestiones trazando rectas y círculos auxiliares, que de tal manera multiplican que no hay quien pueda descifrar el caos de tantas líneas y mostrar directamente al autor el error de su construcción. De nada sirve tampoco acudir a la demostración de la imposibilidad aritmética, porque, en su mayor parte, estas gentes no atienden consideraciones ni refutaciones de su demostración. Cada año llegan a manos de los matemáticos de cierta nombradía gran número de tales envíos, y a ustedes les llegarán también, si viven, tales demostraciones; lo cual es bueno, si están preparados para estas aventuras y saben cómo han de conducirse en ellas. Probablemente, entonces les será de gran utilidad el haber podido dominar alguna demostración de imposibilidad en la forma más simple posible.

Por esto voy a demostrar ahora la *imposibilidad de construir el eptágono regular con el solo empleo de la regla y del compás*. Es bien conocido que toda construcción con estos instrumentos equivale analíticamente a una expresión compuesta de radicales cuadráticos; y recíprocamente, que toda expresión compuesta de estos radicales puede construirse geoméricamente por intersecciones de rectas y circunferencias. Así, pues, podemos formular analíticamente nuestro problema en esta forma: *La ecuación de sexto grado*

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0,$$

característica del eptágono regular, no puede ser resuelta por medio de un número finito de radicales cuadráticos. Esta ecuación es de las llamadas *recíprocas*, en las que si z es una raíz, también lo es $\frac{1}{z}$, lo cual se ve claramente poniéndola bajo la forma

$$z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} = 0 \quad [1]$$

Toda ecuación de esta naturaleza puede reducirse a una de grado mitad, sin más que introducir la nueva incógnita

$$x = z + \frac{1}{z}$$

deduciéndose, por un cálculo sencillo, la siguiente ecuación cúbica en x :

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0 \quad [2]$$

y fácilmente se comprende que o las dos ecuaciones [1] y [2] pueden ser resueltas por medio de radicales o ninguna podrá serlo.

Plano z

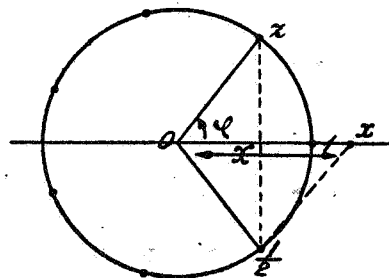


Figura 9

Por lo demás, se ve en seguida una relación geométrica directa entre x y la construcción del eptágono; en efecto, la figura adjunta en que se ha trazado el círculo unidad en el plano complejo, muestra que designando por $\varphi = \frac{2\pi}{7}$ el ángulo central del eptágono regular, los dos vértices contiguos al $z=1$ son

$$z = \cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi \quad \text{y} \quad \frac{1}{z} = \cos \varphi - i \operatorname{sen} \varphi$$

y que por tanto es: $x = z + \frac{1}{z} = 2 \cos \varphi$; con lo cual en cuanto se conoce φ , puede construirse en seguida el eptágono.

Tenemos, por consiguiente, que demostrar que *la ecuación cúbica [2] no puede resolverse por medio de radicales cuadráticos. Esta demostración se descompone en dos partes: una aritmética y otra algebraica*, y comenzamos por la primera que, de modo natural, se relaciona con nuestras consideraciones sobre la Teoría de números: Probaremos, en primer término, que *la ecuación cúbica [2] es irreducible, es decir, que su primer miembro no puede descomponerse en factores literales de coeficientes racionales*. Sabido es, que un polinomio de tercer grado siempre puede descomponerse en un factor lineal y otro cuadrático de coeficientes reales (supuestos reales los del polinomio); y bastará, ahora, demostrar la imposibilidad de que en la descomposición:

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = (x^2 + \beta x + \gamma)(x + \alpha)$$

los coeficientes α , β , γ del segundo miembro sean racionales.

El primer paso esencial para esto es probar que si fuese posible tal descomposición *racional* de nuestro polinomio *entero*, los números α , β y γ tendrían que ser no sólo *racionales*, sino **enteros**. Esta proposición es un caso particular de un importante lema general de Gauss expuesto en sus *Disquisitiones arithmeticae*: *Si un polinomio de la forma*

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

de coeficientes enteros se descompone en un producto de polinomios de la forma

$$\psi(x) = x^r + b_1 x^{r-1} + b_2 x^{r-2} + \dots + b_r$$

de coeficientes racionales, estos coeficientes b son necesariamente números enteros.

Daremos la demostración en el caso concreto que nos ocupa, porque siempre es muy útil cuando se trata de una proposición general, fijar la atención en un ejemplo determinado.

Comenzamos suponiendo que al efectuar la descomposición indicada, los coeficientes α , β y γ han sido reducidos a un común denominador, de modo que podemos escribir:

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = \left(x^2 + \frac{b}{n}x + \frac{c}{n}\right) \left(x + \frac{a}{n}\right) \quad [3]$$

siendo a , b , c y n números enteros; y se trata ahora de probar que los tres quebrados $\frac{a}{n}$, $\frac{b}{n}$, $\frac{c}{n}$ son números enteros, o lo que es lo mismo, que a , b y c son divisibles por n .

Efectuando la multiplicación indicada en el segundo miembro de [3] e identificando sus coeficientes con los de las potencias del mismo grado de x en el primer miembro, resulta que las tres expresiones

$$(4^a) \quad \frac{a+b}{n}, \quad (4^b) \quad \frac{ab}{n^2} + \frac{c}{n}, \quad (4^c) \quad \frac{ac}{n^2}$$

deben ser necesariamente números enteros.

Se llega ahora a la demostración del lema simplemente considerando en lugar de n uno cualquiera de sus factores primos r , poniendo, entonces, $n = n_1 r^k$, siendo n_1 primo con r y multiplicando la expresión (4^a) por n , y las (4^b) y (4^c) por n^2 , se sigue que también son enteros los valores:

$$(5^a) \quad \frac{a+b}{r^k}; \quad (5^b) \quad \frac{ab}{r^{2k}} + \frac{cn}{r^k}; \quad (5^c) \quad \frac{ac}{r^{2k}}.$$

Si ahora pudiéramos deducir de aquí que:

$$a, b \text{ y } c \text{ son divisibles por } r^k \quad [6]$$

podría suprimirse el factor r^k en los numeradores y denominadores de todos los coeficientes de la descomposición [3] y procediendo del mismo modo con los factores primos del denominador n_1 que quedaría, se llegaría a la conclusión de que *todos los factores primos de n* (se sobreentiende las potencias de factores primos divisores de n) *y, por consiguiente, también n , están contenidos en a , b y c .*

Para llegar a la conclusión [6] supongamos primeramente que a sólo fuese divisible por una potencia de r de exponente interior a^k, r^{k_1} ($0 \leq k_1 < k$). Entonces, de la (5^c) se deduce que c tendría que ser divisible, por lo menos, por r^k y aun por una potencia de mayor exponente, pues de otro modo el producto ac no podría ser divisible por la potencia de exponente $2k > k + k_1$. Por consiguiente, el segundo sumando de (5^b) es un número entero y en consecuencia, también lo es el primero $\frac{ab}{r^{2k}}$, con lo cual también resulta que b seguramente es divisible por r^k y entonces, considerando la (5^a) se ve que también a tendría que ser divisible por r^k puesto que lo son la suma $a + b$ y el sumando b , resultado en contradicción con la hipótesis hecha sobre a ; luego ésta es falsa y a seguramente divisible por r^k . De aquí, según lo que acabamos de decir, y fijándonos en (5^a), se infiere que b es divisible por r^k , y de (5^b), por ser ab divisible por r^{2k} , se deduce que c es divisible por r^k . Queda, por lo tanto, demostrada la afirmación [6] y con ello también el lema de Gauss para nuestro caso.

Sólo nos queda, pues, ahora, considerar la posibilidad de una descomposición entera:

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = (x^2 + \beta x + \gamma)(x + \alpha) \quad [7]$$

donde α, β y γ son números enteros. Para deducir de ella un absurdo basta comparar los términos constantes de ambos miembros y se obtiene:

$$-1 = \alpha \cdot \gamma$$

igualdad que da una descomposición de la unidad en un producto de números enteros, cosa sólo posible siendo $\alpha = \pm 1$ y $\gamma = \mp 1$; pero con estas condiciones el segundo miembro se anularía para $x = -\alpha = \mp 1$, y el primer miembro no se anula evidentemente para ninguno de estos dos valores de α , de modo que nuevamente llegamos a una contradicción, de la cual se deduce la imposibilidad de la descomposición entera [4]. Por lo tanto, de un modo general, queda demostrada la imposibilidad de una descomposición en factores racionales y por consiguiente, como queríamos, la irreducibilidad de la ecuación cúbica [2].

La segunda parte de la demostración consistirá, ahora, en probar que una ecuación cúbica irreducible de coeficientes racionales no puede resolverse por medio de radicales cuadráticos. Aunque la naturaleza de esta cuestión es esencialmente algebraica, sin embargo, vamos a tratarla aquí para no perder la conexión con lo expuesto. Nuestra tesis puede ser formulada en sentido positivo de esta manera: *Toda ecuación cúbica*

$$f(x) \equiv x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0 \quad [8]$$

de coeficientes racionales resoluble por medio de radicales cuadráticos, tiene seguramente una de sus raíces racional, es decir, es reducible; pues la existencia de una raíz racional α lleva consigo la del factor racional $x - \alpha$ del polinomio $f(x)$, y, por lo tanto, su reducibilidad.

A esta demostración debe preceder (y este es el punto más importante) una clasificación de todas las expresiones formadas con radicales cuadráticos, o dicho más exactamente, de todas las expresiones que resultan de operaciones racionales con un número finito de radicales cuadráticos y números racionales. Un ejemplo concreto es

$$\alpha = \frac{\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{c}}{\sqrt{d + \sqrt{e + \sqrt{f}}}}$$

en que a, b, \dots, f son números racionales. Naturalmente, que aquí se trata de raíces que no se pueden extraer exactamente en números racionales, pues todas las otras las suponemos, de una vez para siempre, ya extraídas.

Toda expresión de esta clase puede considerarse como una función racional de un cierto número de radicales cuadráticos, en nuestro ejemplo de tres; fijémonos, primeramente, en un solo radical cuyo radicando puede ser todo lo complicado que se quiera; llamaremos entonces *orden del radical al mayor número de radicales superpuestos que en él aparecen*; así, por ejemplo, los radicales que figuran en el numerador de la expresión últimamente escrita α son de segundo y de primer orden, respectivamente, y el del denominador es de tercer orden.

Para una *expresión irracional cuadrática cualquiera* llamamos *orden*, μ , *al mayor de los órdenes de los diferentes «radicales cuadráticos simples» de la naturaleza que acabamos de indicar, con los cuales está compuesta racionalmente la expresión; en nuestro ejemplo es $\mu=3$. Cuando en la expresión figuran varios «radicales cuadráticos simples» de orden μ y su número es n , este «número de términos» lo consideramos como un segundo número característico de la expresión, siempre que ninguno de los n radicales simples de orden μ pueda expresarse racionalmente por medio de los otros con auxilio de radicales de orden inferior. Por ejemplo, en la expresión de primer orden*

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$$

no es 3 el número de términos, sino 2, por ser $\sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$. La expresión α antes escrita es de tercer orden y tiene un solo término. Con esto hemos hecho corresponder a toda expresión irracional cuadrática dos números μ y n , que asociamos en el símbolo (μ, n) como característica o especie (*Rang*) de la expresión. De dos expresiones irracionales cuadráticas de distinto orden, atribuimos menor característica a la de menor orden; y de dos de igual orden, a la de menos términos. Las expresiones de característica mínima son las de orden nullo, o sea los números racionales.

Sea, ahora, x_1 una raíz de la ecuación cúbica [8], expresable por medio de radicales cuadráticos, y supongamos que su expresión es de característica (μ, n) de modo que poniendo de manifiesto uno de los n términos de orden μ , \sqrt{R} , su expresión será de la forma

$$x_1 = \frac{\alpha + \beta \sqrt{R}}{\gamma + \delta \sqrt{R}}$$

donde α , β , γ y δ contienen a lo sumo $n-1$ términos de orden μ , y R es de orden $\mu-1$. Ahora bien, $\gamma - \delta \sqrt{R}$ tiene que ser distinto de cero, pues, de $\gamma - \delta \sqrt{R} = 0$ se sigue $\delta = \gamma = 0$, lo que, evidentemente, es imposible, o $\sqrt{R} = \frac{\gamma}{\delta}$, es decir, que \sqrt{R} podrá ser expresado racionalmente por medio de los otros $n-1$ términos

de orden μ que aparecen en x_1 y, por consiguiente, no lo hubiésemos podido considerar como término de la expresión. Podemos, pues, multiplicar los dos términos del cociente x_1 por $\gamma - \delta\sqrt{R}$ y resulta:

$$x_1 = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{R})(\gamma - \delta\sqrt{R})}{\gamma^2 - \delta^2 R} = P + Q\sqrt{R}$$

donde P y Q son funciones racionales de α , β , γ , δ y R y, por tanto, contienen a lo más $n-1$ términos de orden μ , y aun pueden no contener de este orden sino de orden inferior; es decir, su característica es $(\mu, n-1)$ a lo sumo.

Llevando este valor de x_1 a la ecuación [8] se obtiene

$$f(x_1) \equiv (P + Q\sqrt{R})^3 + A(P + Q\sqrt{R})^2 + B(P + Q\sqrt{R}) + C = 0$$

y efectuando las operaciones indicadas, se llega a una relación de la forma:

$$f(x_1) \equiv M + N\sqrt{R} = 0,$$

en la que M y N son polinomios en P , Q y R , y por tanto, funciones racionales de α , β , γ y δ . Si fuera $N=0$, se seguiría, $\sqrt{R} = -\frac{M}{N}$, es decir, \sqrt{R} podría ser expresado racionalmente

función de α , β , γ , δ y R , luego tendría a lo más $n-1$ términos de orden μ y otros de orden $\mu-1$; lo cual, como antes se dijo, es imposible. Dedúcese, por lo tanto, necesariamente: $N=0$, y en consecuencia, también $M=0$.

Pero de esto se deduce además que también

$$x_2 = P - Q\sqrt{R}$$

es una raíz de la ecuación cúbica [8]; pues la comparación con las últimas ecuaciones da en seguida:

$$f(x_2) = M - N\sqrt{R} = 0$$

Ya con esto, la demostración se hace de modo sencillo y elegante. Si x_3 es la tercera raíz, es conocida la siguiente relación

$$x_1 + x_2 + x_3 = -A$$

y, por consiguiente,

$$x_3 = -A - (x_1 + x_2) = -A - 2P$$

tiene la misma característica que P y, por lo tanto, *inferior a la de x_1* . Puede, ahora, ocurrir, que x_3 sea o no racional; en el primer caso, nuestra proporción queda demostrada; en caso contrario, podríamos tomar la x_3 como punto de partida del mismo razonamiento hecho y deduciríamos que las otras raíces no tienen la característica mayor que la de x_3 , sino que, por consiguiente, *una de ellas, en particular, tiene realmente menor característica que x_3* . Así, vamos pasando de una a otra de las tres raíces, y siempre se llega a reconocer que su característica es, en realidad, inferior a lo que habíamos creído antes. Consecuencia final de esto es la necesidad de admitir que hay una raíz de orden $\mu=0$, es decir, *que la ecuación cúbica [8] admite una raíz racional*. Entonces, las otras dos raíces deben ser también racionales o tener la forma $P \pm Q\sqrt{R}$, siendo P , Q y R números racionales, y con ello queda probado *que $f(x)$ puede descomponerse en un factor cuadrático y en uno lineal racionales, y, por lo tanto, es reducible. Toda ecuación cúbica irreducible y, en particular nuestra ecuación del eptágono regular, es, pues, irresoluble por medio de radicales cuadráticos*, y con esto queda demostrada por completo *la imposibilidad de construir el eptágono regular con el solo empleo de la regla y del compás*.

Como se ha podido ver, esta demostración es clara y sencilla y realmente supone muy pocos conocimientos previos; con todo, exige algo, sobre todo la clasificación de las magnitudes expresadas por medio de radicales cuadráticos, y, por tanto, un cierto grado de una difícil abstracción matemática. Lo que no me atrevería yo a decir, es si la demostración es lo bastante sencilla para llevar a la mente de los *matemáticos legos*, a que antes nos referimos, el convencimiento de la inutilidad de sus ensayos para llegar a una solución geométrica elemental del problema; y no obstante creo conveniente intentar explicar con detenimiento y claridad la demostración a estos aficionados, siempre que de ello se presente ocasión.

Para terminar, daremos algunas noticias *bibliográficas sobre*

los problemas relativos a los polígonos regulares, así como a la cuestión general que, con motivo de éstos, hemos tocado de ligero, la posibilidad de las construcciones geométricas. En primer término, hay que citar, nuevamente, la obra de Weber-Wellstein, tomo I (Abschn. 18 y 19); después la pequeña memoria *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie* (1) que contiene unas conferencias dadas por mí en 1895, con ocasión de una Asamblea de profesores de segunda enseñanza (2).

Queda ya sólo, en lo relativo a la teoría de números, por examinar el último punto, la transcendencia de π que dejo para final del curso, para hablar en el próximo capítulo de la última ampliación del concepto de número.

(1) Red. por *H. Jaeger*, Leipzig, 1895.

(2) En sustitución de esta memoria, que se halla agotada en las librerías, se puede indicar una obra muy completa y detallada titulada «Cuestiones de Geometría», de F. Enriques, editada en Bolonia, parte de la cual poseemos una traducción española, editada por la Sociedad Matemática española, y en la que el lector puede hallar segura orientación en todas estas particulares cuestiones. (N. del T.)

CAPITULO IV

LOS NUMEROS COMPLEJOS

I. Los números complejos ordinarios

Conviene, antes de entrar en su estudio, dar una rápida ojeada histórica sobre su desarrollo. Aparecieron por vez primera los números imaginarios en el año 1545, cuando Cardano dió a conocer la fórmula de resolución de la ecuación cúbica, si bien, entonces, de un modo incidental. Podemos repetir aquí la observación hecha al tratar de los números negativos: *los números imaginarios surgieron de las mismas operaciones del cálculo, independientemente y aun contra la voluntad de los matemáticos; y su uso fué extendiéndose poco a poco, a medida que se iba reconociendo su utilidad.*

A decir verdad, los números imaginarios no hallaron una acogida franca entre los matemáticos, lo que hizo que conservasen por largo tiempo una apariencia *mística*, que aun hoy todavía subsiste para todos los alumnos, al oír hablar por vez primera del maravilloso $i = \sqrt{-1}$. Como corroboración de esto, puede mencionarse una expresión muy característica de *Leibniz* en 1702 que poco más o menos dice así: «los números imaginarios son un refugio delicado y admirable del espíritu divino, casi una cosa anfibia entre el ser y no ser». En el siglo XVIII no se aclara completamente este concepto de los números imaginarios; con todo, Euler reconoce *la significación fundamental de los números imaginarios en la teoría de funciones* y establece en 1748 la admirable relación

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

por la cual se revela el íntimo enlace entre las diferentes funcio-

nes que intervienen en el Análisis elemental. Finalmente, en el siglo XIX es cuando se da el *concepto claro de la naturaleza de los números imaginarios*, contribuyendo a ello, en primer término, la interpretación geométrica a que, casi simultáneamente, llegaron varios investigadores en la expresada centuria. Basta citar, entre ellos al que, seguramente, ha profundizado más en el carácter de estos números y al que también ha ejercido una influencia más prolongada sobre el público; a saber: Gauss, quien, como demuestra su Diario, mencionado en el capítulo anterior, estaba ya el año 1797 en plena posesión de la interpretación geométrica, aunque no la diera a la publicidad sino mucho más tarde.

La segunda contribución del siglo XIX es una concepción puramente formal de los números complejos que viene a reducirlos a los números reales; tal concepción se remonta a los investigadores ingleses del año treinta, como puede verse circunstanciadamente en la página 66 del ya citado libro de Hankel.

Sobre estos *dos diversos modos de establecer los números complejos, que todavía hoy dominan* en el campo de la ciencia, conviene decir algo. Coloquémonos, primero, en *el punto de vista puramente formal*, en el cual se prescinde de la significación de los entes y sólo se atiende a la compatibilidad de las reglas operatorias, para justificar los conceptos que se establecen. Entonces la introducción de los números complejos puede formularse del siguiente modo, en el que desaparece toda traza de cosa misteriosa:

1) El número complejo $x+iy$ es el conjunto de los dos números reales x e y , o sea, un par de números; sobre los cuales se establecen los convenios siguientes:

2) Dos números complejos $x+iy$ y $x'+iy'$ se llaman iguales cuando $x=x'$, $y=y'$.

3) La adición y la sustracción están definidas por la relación:

$$(x+iy) \pm (x'+iy') = (x \pm x') + (y \pm y') i$$

Con estos convenios son válidas todas las reglas de la adición, como fácilmente puede comprobarse; únicamente la ley de monotonía no puede subsistir en su forma primitiva, ya que los nú-

meros complejos no aparecen tan sencillamente ordenados como los números naturales o los reales cuando se atiende su magnitud. Por razón de brevedad no entramos en la modificación dada a la ley de monotonía para esta clase de números.

4) Para la *multiplicación* se realiza el cálculo como si se tratara de letras ordinarias, estableciendo como convenio especial poner siempre $i^2 = -1$; así, pues, será

$$(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

Entonces son válidas, igualmente, como es fácil comprobar, todas las leyes de la multiplicación, con excepción de la ley de monotonía.

5) La *división* se define como operación inversa de la multiplicación; en particular se tiene, como se ve aplicando la prueba de esta operación:

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Esta operación es siempre posible, fuera del caso en que $x=y=0$, es decir, *subsiste el mismo caso de excepción que en el campo de los números reales, a saber, la división por cero.*

Síguese de todo lo expuesto, la imposibilidad de que el cálculo

Plano x

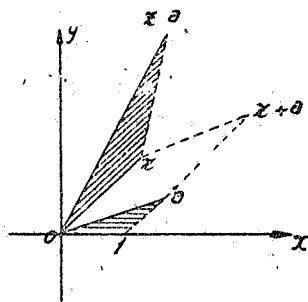


Figura 10

lo con números complejos pueda conducir a contradicciones, puesto que ha quedado reducido a los números reales y a las operaciones con estos, que hemos reconocido como compatibles.

Después de esta consideración puramente formal de la cues-

tión surge naturalmente el deseo de tener una interpretación geométrica o intuitiva de los números complejos y de las operaciones, en la cual pueda verse una razón intuitiva de su compatibilidad. Esto se obtiene con la interpretación de Gauss a que antes nos hemos referido, de todos conocida, a saber: el conjunto de los puntos (x, y) del plano de un sistema de coordenadas (x, y) se puede tomar como una representación del conjunto de los números complejos $x+iy$. La suma de dos números complejos z y a se realiza por la conocida construcción del paralelogramo partiendo de los puntos correspondientes a los sumandos; mientras en la multiplicación, el producto se obtiene por la construcción de un triángulo semejante al $aO1$ (donde 1 significa el punto unidad $(x=1, y=0)$) construido sobre oz como lado homólogo del $O1$. Dicho concisamente: la adición $z'=z+a$ significa geoméricamente una traslación del plano complejo sobre sí mismo y la multiplicación $z'=za$ una transformación de semejanza, es decir, un giro seguido de la homotecia, permaneciendo fijo en ambas el punto cero $(x=0, y=0)$.

De esta disposición de los puntos representativos de los números en el plano, se deduce además inmediatamente lo que aquí tiene que aparecer en lugar de las leyes de monotonía de los números reales. Esta indicación basta para darse cuenta perfectamente del asunto y recordarlo en todo momento.

No quiero pasar de aquí sin decir algo acerca de la ocasión en que Gauss habla expresamente y con toda claridad de la fundamentación de los números complejos por su interpretación geométrica, con la que alcanzaron la general aceptación. En un trabajo del año 1831 se ocupó Gauss con la teoría especial de los números complejos enteros $a+ib$, donde a y b son números enteros, extendiendo a ellos los teoremas de la Teoría de números ordinaria sobre factores primos, restos cuadráticos y bicuadráticos, etc.; cuyas generalizaciones hemos mencionado ya con ocasión del último teorema de Fermat. En el prólogo (1) de esta memoria desarrolla Gauss lo que él llama verdadera metafísica de los números imaginarios y fundamenta la razón de operar con números complejos en que tanto a ellos como a las operaciones que con los mismos pueden realizarse se les puede asignar la re-

(1) Véase *Werke*, Bd. II (Göttingen, 1876), pág. 175.

presentación geométrica ya expuesta. Como se ve, *no se coloca en el punto de vista formal*. Aparte esto, son *muy dignas de leerse* estas largas y bellas disquisiciones de *Gauss*. No insisto más acerca de ellas y me limito a hacer observar, ahora, que *Gauss* en lugar de la palabra «*imaginario*», propone usar la más clara «*complejo*», que, en efecto, ha recibido ya carta de naturaleza.

II. Números complejos superiores, y, en particular, cuaternios

A cualquiera que se ocupe con alguna profundidad de los números complejos, se le ocurre la idea de si será posible formar otros números complejos más complicados, de mayor número de nuevas unidades, entre las cuales una sea i , y de establecer para ellos un cálculo racional. Así orientados y trabajando independientemente el uno de otro, *H. Grassmann* en Stettin y *W. R. Hamilton* en Dublín alcanzaron por el año 1840 resultados de positiva transcendencia. De un modo particular vamos a tratar con algún detenimiento de la invención de *Hamilton*, el *cálculo de cuaternios*, y, ante todo, como de costumbre, del planteamiento general del problema.

Los números complejos ordinarios $x+iy$ se pueden considerar compuestos de dos diferentes *unidades*, 1 e i , mediante los *parámetros reales* x e y , en la forma $x \cdot 1 + y \cdot i$ llamada *combinación lineal*. Del mismo modo, si consideramos, ahora, un número cualquiera, tal como n , de unidades distintas entre sí $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$, podemos designar como *sistema de números complejos superiores a la totalidad de las combinaciones lineales con los n números reales arbitrarios* $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$; la expresión de uno cualquiera de ellos será, pues:

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n ;$$

a los números x_1, x_2, \dots, x_n se les llama *componentes* del x .

Se comprende fácilmente que dos números tales como x e

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$$

se definirán como iguales, cuando sean iguales los coeficientes

de las unidades de la misma clase en uno y en otro número, y sólo en tal caso; es decir, cuando se tiene:

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n.$$

También es obvio que la definición de la adición y de la sustracción debe reducirse a la operación análoga con los componentes:

$$x \pm y = (x_1 \pm y_1)e_1 + (x_2 \pm y_2)e_2 + \dots + (x_n \pm y_n)e_n$$

Más difícil e interesante es el caso de la multiplicación; procederemos primeramente efectuando la multiplicación siguiendo las reglas del cálculo literal, multiplicando cada término de lugar j de x por cada término de lugar k de y ($j, k = 1, 2, \dots, n$):

$$x \cdot y = \sum x_j y_k e_j e_k, \quad (j, k = 1, 2, \dots, n)$$

Para que nuevamente se obtenga así un número de nuestro sistema es necesario dar una regla que defina los productos $e_j e_k$ como números complejos del sistema; es decir: como combinaciones lineales de las unidades dadas; debe haber, por tanto, n^2 ecuaciones de la forma:

$$e_j e_k = \sum c_{jkl} e_l, \quad (j, k, l = 1, 2, \dots, n)$$

y entonces resulta, en efecto, que

$$y = \sum_l (\sum_{j,k} x_j \cdot y_k c_{jkl}) e_l, \quad (j, k, l = 1, 2, \dots, n)$$

es siempre un número del sistema. Puede, pues, decirse, que lo que caracteriza cada sistema particular de números complejos es el modo de fijar las reglas de la multiplicación de las unidades, es decir, el esquema de los coeficientes c_{jkl} .

La división se define ahora como operación inversa de la multiplicación y se demuestra que en esta concepción general no es necesario que la división se realice siempre de un modo único, aun cuando el divisor no se anule; pues la determinación del cociente y por la relación $xy = z$ se realiza mediante la resolución de las n ecuaciones lineales $\sum x_j y_k c_{jkl} = z_l$ con las n in-

cógnitas y_1, y_2, \dots, y_n ; y éstas tienen, en el caso de ser nulo su determinante, ninguna o infinitas soluciones. En igual caso, pueden ser también todas las $z_i=0$, sin que todas las y_k se anulen, es decir, *el producto de dos números puede ser nulo, sin que sea nulo ninguno de sus factores.*

Sólo por elección apropiada de valores de las magnitudes c_{ni} puede lograrse aquí un completo acuerdo con lo que pasa con los números ordinarios; y, en efecto, un estudio más profundo de este problema demuestra que *cuando es $n > 2$ necesariamente hay que prescindir de una u otra regla formal*; por esto, se elige en cada caso la que parezca de menor transcendencia en la cuestión de que se trate.

Hechas estas consideraciones generales, vamos a fijarnos más especialmente en el ejemplo de los cuaternios, que por sus numerosas e importantes aplicaciones a la Física y a la Mecánica constituyen *el más importante de los sistemas de números complejos de orden superior*. Como su mismo nombre indica, se componen de cuatro números ($n=4$); pudiendo considerarse como degeneración de los mismos los vectores ternarios, bien conocidos de todos y de los que, siguiera sea incidentalmente, ya se oye hablar en la escuela.

Como primera de las cuatro unidades de las cuales se consideran compuestos los cuaternios, se utiliza (como acontece en los números complejos ordinarios) *la unidad real*.

Se acostumbra a designar las otras tres unidades, siguiendo a Hamilton, por las letras minúsculas i, j y k de modo que la forma general de los cuaternios es

$$q = d + ia + jb + kc$$

donde a, b, c y d , los coeficientes del cuaternio, son números reales.

El primer componente d , que está multiplicado por la unidad real y corresponde a la parte real del número complejo ordinario, recibe el nombre de *parte escalar* del cuaternio; y el conjunto $ai + bj + ck$, compuesto de los otros tres términos, su *parte vectorial*.

Respecto a la *adición de cuaternos*, apenas se puede agregar nada a lo antes dicho con carácter general y, por consiguiente,

vamos a indicar una interpretación geométrica muy natural, la cual se reduce a la ya conocida de los vectores. La parte vectorial de q se representa por un *segmento* rectilíneo, cuyas proyecciones sobre los ejes de un triedro de referencia sean a, b, c , y atribuyendo a este segmento un *peso* de magnitud igual a la parte escalar del cuaternio, se obtiene una representación de éste.

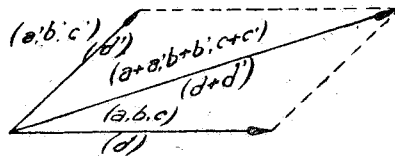


Figura 11

Operando así se efectúa la adición de q y $q' = d' + ia' + jb' + kc'$ aplicando la regla del paralelogramo a las partes vectoriales y atribuyendo al vector resultante un peso igual a la suma de los pesos de los sumandos; así se tiene, en efecto, la representación del cuaternio,

$$q + q' = (d + d') + i(a + a') + j(b + b') + k(d + c') \quad [1]$$

Para ver las propiedades específicas de los cuaternios fijémoslos, en primer lugar, en la multiplicación, y en particular, según dijimos, en los *convencios sobre los productos de unidades*.

Indicaremos, primeramente, los cuaternios que Hamilton fijó a los 16 productos que pueden formarse con 4 unidades. Desde luego, se opera con la primera unidad 1 lo mismo que con el número real 1, de modo que

$$1^2 = 1, \quad i \cdot 1 = 1 \cdot i = i, \quad j \cdot 1 = 1 \cdot j = j, \quad k \cdot 1 = 1 \cdot k = k \quad [2^a]$$

Como esencialmente nuevo, se establece para los cuadrados de las otras tres unidades:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad [2^b]$$

y para sus productos binarios

$$j \cdot k = +i, \quad k \cdot i = +j, \quad i \cdot j = +k \quad [2^c]$$

en tanto que al invertir los factores de estos productos, se pone:

$$k \cdot j = -i, \quad i \cdot k = -j, \quad j \cdot i = -k \quad [2^a]$$

Con estos convenios salta a la vista que *la ley conmutativa de la multiplicación no subsiste ya*, y que este inconveniente no puede orillarse si queremos conservar la uniformidad en la división y que la anulación del producto lleve consigo la de uno de sus factores. Demostraremos en seguida que *todas las demás leyes de la adición y la multiplicación subsisten, con la sola excepción indicada, y que los convenios hechos son los más adecuados.*

Formemos, en primer lugar, el *producto de dos cuaternios generales*:

$$p = d + ia + jb + kc, \quad q = w + ix + jy + kz,$$

$$q' = p \cdot q = (d + ia + jb + kc)(w + ix + jy + kz)$$

teniendo en cuenta el orden de sucesión de los factores. Multiplicaremos cada término del primero por cada uno del segundo, reemplazando los productos de las unidades por los valores dados en nuestros convenios, y en términos afectados de la misma unidad sacaremos ésta factor común; así se obtiene:

$$q' = pq = w' + ix' + jy' + kz' = (dw - ax - by - cz)$$

$$+ i(aw + dx + bz - cy)$$

$$+ j(bw + dy + cx - az)$$

$$+ k(cw + dz + ay - bx) \quad [3]$$

Los componentes del cuaternio producto son, por consiguiente, *combinaciones bilineales* y sencillas de los componentes de ambos factores. Cuando se cambia el orden de sucesión de éstos, cambian de signo los seis términos que aparecen subrayados en la relación escrita; de modo que *q . p es, en general, diferente de p . q* y no sólo en signo, como sucede a los productos binarios de las unidades. Pero aunque, como vemos, no se cumple aquí la ley conmutativa, son *válidas sin alteración alguna las leyes distributiva y asociativa.* Pues si formamos por una parte

el producto $p(q+q_1)$, y por otra $pq+pq_1$, atendiendo sólo a la multiplicación formal, sin efectuar las sustituciones de los productos de las unidades por los valores convenidos, obtenemos necesariamente idénticas expresiones; y esta identidad no se altera por realizar las indicadas sustituciones en ambas expresiones.

La ley asociativa se cumple, como se comprende fácilmente, con tal que sea válida para la multiplicación de las unidades; y esto se ve inmediatamente, sin más que aplicar los convenios hechos; como ejemplo, demostremos que es:

$$(ij)k=i(jk).$$

Se tiene, en efecto:

$$(ij)k=k \cdot k=-1 \quad \text{y} \quad i(jk)=i \cdot i=-1$$

Pasamos, ahora, a la *división*; basta probar que *dado un cuaternio cualquiera*, $p=d+ia+jb+kc$, *se puede determinar uno, y solamente uno, q, tal que se verifique* $pq=1$. Designaremos este cuaternio q por $\frac{1}{p}$; y al operar con él se reduce fácilmente la división por p . Para determinar el cuaternio q , pongamos $q'=1=1+0 \cdot i+0 \cdot j+0 \cdot k$ en la expresión [3] y obtendremos por igualación de los componentes de las mismas unidades en ambos miembros las siguientes ecuaciones con los 4 componentes desconocidos x , y , z y w , de q :

$$\begin{aligned} dw-ax-by-cz &= 1 \\ aw+dx-cy+bz &= 0 \\ bw+cx+dy-az &= 0 \\ cw-bx+ay+dz &= 0 \end{aligned}$$

La resolubilidad de un sistema de ecuaciones de esta especie depende, como es sabido, de su determinante, que, en este caso, es hemisimétrico, por ser iguales y de signos contrarios los elementos simétricamente colocados respecto de la diagonal principal, en tanto que los de ésta son todos iguales entre sí. La teoría

de los determinantes enseña el modo particularmente sencillo de calcular tales determinantes; en el caso actual su valor es:

$$\begin{vmatrix} d & -a & -b & -c \\ a & d & -c & b \\ b & c & d & -a \\ c & -b & a & d \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

En esta circunstancia, de ser el determinante precisamente igual a una potencia de la suma de los cuadrados de los componentes de p , se basa el *acierto de los convenios de Hamilton*; pues de ella se sigue que *el determinante será siempre diferente de cero, excepto cuando se tenga simultáneamente $a=b=c=d=0$* ; y, por lo tanto, hay *una solución única* para dicho sistema de ecuaciones con esta sola evidente excepción $p=0$, y el *cuaterniono recíproco está determinado unívocamente*.

La magnitud $T = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ se llama «*tensor de p* » y desempeña un importante papel en la teoría. Utilizando esta expresión del tensor de p se comprueba directamente con facilidad que la solución única del sistema está dada por:

$$x = -\frac{a}{T^2}, \quad y = -\frac{b}{T^2}, \quad z = -\frac{c}{T^2}, \quad w = -\frac{d}{T^2}$$

de modo que se obtiene como resultado final,

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{d + ia + jb + kc} = \frac{d - ia - jb - kc}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Introduciendo, análogamente a como se hace en los números complejos ordinarios, el valor conjugado de p :

$$\bar{p} = d - ia - jb - kc,$$

la última fórmula puede también escribirse así:

$$\frac{1}{p} = \frac{\bar{p}}{T^2} \quad \text{o bien} \quad p\bar{p} = T^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

fórmulas que aparecen como una generalización inmediata de ciertas propiedades de los números complejos ordinarios.

Puesto que, recíprocamente, también p es el número conjugado de \bar{p} , es

$$p\bar{p} = T^2$$

de modo que en este caso especial se cumple la ley conmutativa. Con lo dicho resulta inmediata la resolución del problema de la división en general. De

$$p \cdot q = q'$$

síguese por multiplicación por $\frac{1}{p}$

$$q = \frac{1}{p} \cdot q' = \frac{\bar{p}}{T^2} \cdot q';$$

en cambio, la ecuación $qp = q'$ que resulta de permutar los factores en el primer miembro de la primera tiene, en general, una solución diferente:

$$q = q' \cdot \frac{1}{p} = q' \cdot \frac{\bar{p}}{T^2}.$$

Vamos ahora a tratar de la siguiente interesante cuestión: ver si podrá existir una *interpretación geométrica de los cuaternios*, en la que aparezcan de un modo natural estas operaciones junto con sus leyes.

Para ello, empecemos por el caso especial, en que *ambos factores sean simples vectores*; es decir, que son nulas sus partes escalares, $w = d = 0$. Entonces, la fórmula general de la multiplicación se reduce a

$$q' = pq = (ia + jb + kc)(ix + jy + kz) = \\ = (ax + by + cz) + i(bz - cy) + j(cx - az) + k(ay - bx)$$

es decir, *el producto de dos cuaternios que se reducen a vectores se compone de una parte escalar y de una vectorial*. Podemos relacionar estas partes fácilmente con las dos diferentes clases de *multiplicación de vectores* usuales en Alemania (1). Estos con-

(1) Y corrientes hoy en todo el mundo. (N. del T.)

ceptos, que se hallan entre nosotros mucho más difundidos, que el cálculo de cuaternios, son debidos a Grassmann, aunque la misma palabra *vector* sea de origen inglés.

Las dos clases de productos vectoriales con los cuales se opera ordinariamente se designan ahora, frecuentemente como *producto interior (escalar)* $ax + by + cz$ (es decir, salvo el signo, la parte escalar del producto anterior de cuaternios); y *producto*

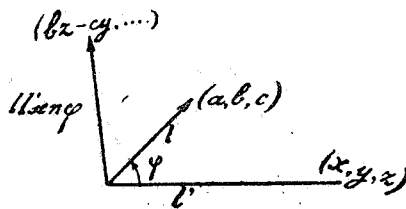


Figura 12

exterior (vectorial): $i(bz - cy) + j(cx - az) + k(ay - bx)$ (es decir, la parte vectorial del producto de los cuaternios). Efectuemos la representación geométrica de ambas partes.

Tomando como origen de ambos vectores (a, b, c) y (x, y, z) el origen de coordenadas, sus extremos son los puntos de coordenadas (a, b, c) y (x, y, z) , y sus longitudes $l = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ y $l' = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, respectivamente. Si designamos por φ el ángulo determinado por los dos segmentos, sencillas consideraciones de Geometría analítica demuestran que el producto interno es:

$$ax + by + cz = ll' \cos \varphi$$

El *producto exterior* es, también, un *vector*, perpendicular al plano de l y l' , como se ve fácilmente; y cuya longitud viene expresada simplemente por: $ll' \sin \varphi$.

Es esencial aquí el *sentido del vector producto*, es decir, ver hacia qué lado del plano determinado por l y l' hay que llevarlo. Este sentido es *diferente según el sistema de coordenadas* a que se refieren los vectores. En efecto, como es sabido, se pueden dar *dos sistemas de coordenadas rectangulares no congruentes*, es decir, que no pueden coincidir por superposición y que se derivan el uno del otro conservando el sentido de los ejes y y z , por ejemplo, y cambiando el sentido del eje x .

Estos sistemas están *simétricamente colocados uno respecto del otro* como la *mano derecha y la izquierda*, y se pueden simbolizar, según esto, por la siguiente regla nemotécnica: *x, y y z aparecen en un sistema, como indica la figura formada por los dedos pulgar, índice y corazón de la mano DERECHA extendidos; y en el otro sistema como la figura de los mismos dedos de la*

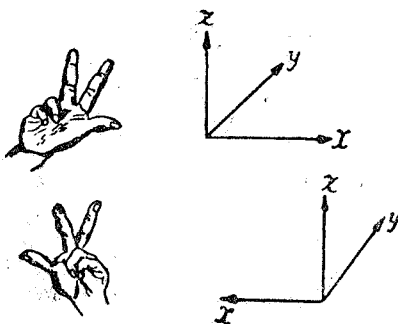


Figura 13

mano IZQUIERDA. Estas dos clases de sistemas son empleados confusamente en la literatura matemática, utilizándose uno u otro, según los países, las disciplinas y los autores.

Consideremos, primero, el caso más sencillo, en que son $p=i$, $q=j$, es decir, las unidades llevadas sobre los ejes x e y respectivamente; entonces, por ser $ij=k$, el producto exterior es igual al segmento unidad llevado sobre el eje z . Se puede lograr que i

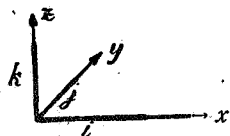


Figura 14

y j pasen a ser vectores cualesquiera p y q , variando de un modo continuo, de modo que k llegue a ser la parte vectorial del producto $p \cdot q$ sin desaparecer por esto; y por lo tanto, *el primer factor, el segundo y el producto vectorial deben tener siempre la misma posición relativa que los tres ejes x, y y z del sistema*

de coordenadas, luego de sentido positivo o negativo según se haya elegido previamente uno u otro de los sistemas de coordenadas.

Conviene agregar algunas observaciones acerca de la cuestión de la notación en el Análisis vectorial. Se emplean, en efecto, un gran número de símbolos para designar una misma operación vectorial; y desgraciadamente no se ha llegado todavía a establecer una notación única de general aceptación. Hace cuatro años, (1903), en una asamblea de naturalistas celebrada en Casel, se nombró una comisión para este objeto, pero sus miembros no pudieron ponerse de acuerdo, y a pesar de que cada uno de ellos mostraba una buena voluntad para ceder en su propia opinión y acercarse a la de los demás, el único resultado obtenido fueron tres nuevas notaciones.

Un acuerdo efectivo de todos cuantos se interesan en esta disciplina, sobre nomenclatura y notación, es cosa que por esta y otras experiencias análogas, sólo me parece posible cuando en ellas vengán involucrados grandes intereses materiales. Sólo bajo una presión de tal naturaleza pudo llegarse en Electrotecnia, el año 1891, a la aceptación universal del sistema de magnitudes Volt, Ampère y Ohm, incorporado, después, a la legislación de todos los países, porque la industria necesitaba como fundamento de todas sus denominaciones una unidad en la nomenclatura.

Detrás del cálculo vectorial no hay intereses materiales tan grandes; de modo que, por ahora, hay que conformarse, de grado o por fuerza, con que cada matemático emplee la nomenclatura a que esté acostumbrado y es la que cree más cómoda, y aun, si tiene algo de dogmático, la única que admite como exacta,

III. Multiplicación de cuaternios y giros de segmentos en el espacio

Vamos a tratar ahora de la interpretación geométrica de la multiplicación de cuaternios en general, pero antes determinaremos el valor del tensor del producto de dos cuaternios. Reemplazando p y q , en el producto $q' = pq$, por sus conjugados \bar{p} y \bar{q} ; es decir, cambiando de signo a, b, c, x, y, z , según la expresión dada para el producto, quedará invariable su parte escalar y sólo

los coeficientes de i , j y k que no aparecen subrayados cambian de signo ; si, además, se cambia el orden de sucesión de los factores, entonces cambian de signo también los términos subrayados, y, por consiguiente, el producto $\bar{p}\bar{q}$ tiene, precisamente, el valor conjugado $\overline{q'}$. Resulta, pues, que :

$$\text{Si es } q' = p \cdot q, \text{ también es } \overline{q'} = \bar{q} \cdot \bar{p}.$$

Multiplicando estas dos igualdades entre cuaternios, se obtiene :

$$q' \overline{q'} = p q \bar{q} \bar{p}.$$

Aquí es esencial conservar el orden de sucesión de los factores ; pero podemos aplicar la ley asociativa y escribir

$$q' \overline{q'} = p (q \bar{q}) \bar{p}.$$

Ahora bien, como se ha visto anteriormente, es

$$q \bar{q} = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

luego :

$$w'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = p (w^2 + x^2 + y^2 + z^2) \bar{p}$$

fórmula en la cual el factor central del segundo miembro es escalar ; y como para la multiplicación de cualquier magnitud escalar M por un cuaternio es válida la ley conmutativa, puesto que

$$Mp = Md + i(Ma) + j(Mb) + k(Mc) = pM,$$

será, en particular,

$$w'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = p \bar{p} (w^2 + x^2 + y^2 + z^2)$$

y siendo $p \bar{p}$ el cuadrado del tensor de p , resulta

$$w'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = (d^2 + a^2 + b^2 + c^2) (w^2 + x^2 + y^2 + z^2) \quad [1]$$

que nos dice que el *tensor de un producto de cuaternios es igual al producto de los tensores de los factores*. Naturalmente, puede

obtenerse también esta fórmula por cálculo directo, tomando las expresiones de w' , x' , y' y z' directamente de la fórmula de la multiplicación antes dada [3, pág. 90].

Ahora ya, representaremos todo cuaternio q como el segmento que une el origen de coordenadas de un espacio de cuatro dimensiones con el punto (x, y, z, w) del mismo, de un modo completamente análogo a la representación de vectores en el espacio de tres dimensiones. No hay necesidad, hoy día, de disculparse cuando se emplea el espacio cuatridimensional, como se hacía siempre en la época en que yo estudiaba; todos saben que no se trata de ninguna creación metafísica, sino que el espacio de más de tres dimensiones es sencillamente un modo de hablar matemático muy cómodo, análogo al que se deriva de nuestra concepción del espacio.

Supongamos fijo el factor p , o lo que es igual, las magnitudes x , a , b y c ; entonces, la ecuación entre cuaternios

$$q' = p \cdot q$$

representa una transformación lineal de los puntos (x, y, z, w) del espacio cuatridimensional en los puntos (x', y', z', w') ; puesto que hace corresponder linealmente a todo sector de este espacio otro del mismo. Las ecuaciones explícitas de la transformación, es decir, las expresiones de x' , y' , z' , w' como funciones lineales (enteras) de x , y , z , w se deducen de la comparación de los coeficientes en la fórmula del producto de cuaternios tantas veces mencionada. Además, la ecuación de los tensores [1] muestra que la distancia $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$ del punto (x, y, z, w) al origen, viene siempre multiplicada por un factor, siempre el mismo, $T = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$; y ya vimos antes (pág. 92) que el determinante de la transformación es seguramente positivo.

Ahora bien; se sabe por la Geometría analítica del espacio de tres dimensiones, que una transformación de las coordenadas x , y , z , que tenga la propiedad de conservar invariable la expresión $x^2 + y^2 + z^2$ (es decir, «ortogonal») y que además tenga positivo su determinante representa un giro del espacio alrededor del origen de coordenadas; y que, recíprocamente, todo giro se obtiene por una transformación de esta clase. Pero si la transfor-

mación lineal deja invariable $x^2 + y^2 + z^2$, salvo un factor T^2 , y el determinante es también positivo, resulta *un giro de todo el espacio seguido de una dilatación de magnitud T quedando fijo el origen de coordenadas.*

Lo que acontece en el espacio de tres dimensiones se extiende al de cuatro dimensiones diciendo que exactamente del mismo modo nuestra transformación lineal representa un giro, seguido de una dilatación, en que el origen permanece fijo. Fácilmente puede verse, sin embargo, que aquí *no se presenta el movimiento más general de esta clase*; puesto que la transformación en cuestión contiene solamente *cuatro parámetros arbitrarios a, b, c y d* , en los componentes, mientras que *el movimiento más general de la naturaleza indicada en el espacio de 4 dimensiones contiene 7 parámetros*. Y, en efecto, para que la transformación lineal general sea uno de los movimientos a que venimos refiriéndonos, debe verificarse la identidad

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + w'^2 = T^2(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)$$

de la cual obtenemos, por identificación de coeficientes, 10 condiciones, puesto que el primer miembro, al sustituir x', y', z', w' por sus expresiones en función de x, y, z, w , pasa a ser una forma cuadrática de 4 variables y contiene, por consiguiente, $\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ términos. Como, además, T es arbitrario, sólo quedan $10 - 1 = 9$ ecuaciones de condición para determinar los 16 coeficientes de la transformación lineal de modo que quedan todavía arbitrarios $16 - 9 = 7$ parámetros.

Merece observarse que, a pesar de esto, *se puede obtener el movimiento más general, resultado de un giro y una dilatación con el origen fijo, por medio de un producto de cuaternios*. Sea, en efecto, $\pi = d + ia + jb + kc$ un cuaternio constante; se prueba exactamente, como antes que el producto $q' = q\pi$ (fórmula que sólo difiere de la anterior por alteración del orden de factores) es también una rotación y una dilatación de centro en el origen del espacio E_4 , y, por consiguiente, también lo es la composición de ambos

$$q' = p q \pi = (d + ia + jb + kc) q (\bar{d} + i + a + j\beta + k\gamma)$$

Esta transformación contiene, ahora, precisamente 7 parámetros arbitrarios—no ocho—puesto que no varía cuando se multiplican a , b , c y d por un mismo número real y al mismo tiempo se dividen por éste α , β , γ y δ ; parece, pues, natural decir que representa el movimiento más general del espacio de cuatro dimensiones, resultante de una rotación y una dilatación de centro en el origen, notable teorema que ha sido demostrado por Cayley. Yo me limito a hacer una simple referencia histórica para no perdernos demasiado en los detalles de esta representación. La fórmula se encuentra en el trabajo de Cayley «*On the homographic transformation of a surface of the second ordre into itself*» (1) del año 1854; así como en algunas otras de sus memorias (2).

Esta fórmula de Cayley tiene también la gran ventaja de hacer resaltar de una manera sencillísima; la composición de dos movimientos de la expresada naturaleza. Supongamos representado un segundo de éstos, por la ecuación

$$q'' = w'' + ix'' + jy'' + kz'' = p'q'\pi'$$

donde q' y π' son ciertos cuaternios dados; llevando a esta ecuación el valor antes dado de q' se tiene

$$q'' = p'(pq\pi)'\pi'$$

y en virtud de la ley asociativa de la multiplicación

$$q'' = (p' \cdot p) \cdot q \cdot (\pi \cdot \pi')$$

o bien

$$q'' = r \cdot q \cdot \rho$$

siendo

$$r = p' \cdot p, \quad \rho = \pi \cdot \pi'$$

dos nuevos cuaternios bien determinados. Tenemos así la expresión del movimiento que lleva de q a q'' , precisamente en la an-

(1) Impresa en Cayley, *Bodected mathematicas papers*, vol. II (Cambridge, 1859), pág. 133.

(2) Véase, por ejemplo, «*Recherches ultérieures sur les déterminants gauches*» (loc. cit., pág. 214).

tigua forma, siendo el factor que precede y el que sigue a q productos de los cuaternios multiplicandos y multiplicadores, respectivamente, en las representaciones de los movimientos componentes.

Probablemente, no quedarán ustedes satisfechos con esta representación cuatridimensional, y desearán algo palpable, que mejor se avenga con nuestra intuición del espacio tridimensional. Ahora bien, se pueden deducir como casos particulares sencillos de las fórmulas hasta ahora indicadas, las que rigen las mismas operaciones en el espacio de tres dimensiones; y en esta circunstancia precisamente radica la gran importancia que tiene la multiplicación de cuaternios para la Física y la Mecánica ordinarias, y digo expresamente ordinarias, para no anticiparos a otros desarrollos de estas disciplinas, en los que también son directamente aplicables las representaciones anteriores, y es de advertir que tales desarrollos están más próximos, probablemente, de lo que ustedes imaginan: pues investigaciones recientes de Electrodinámica, que figuran en el llamado *Principio de la relatividad*, no son propiamente otra cosa que una aplicación consecuente de los movimientos en un espacio de cuatro dimensiones; y así han sido recientemente expuestos por el profesor Minkowski.

Quedémonos, ahora, en el espacio de 3 dimensiones. Entonces un movimiento lleva un punto (x, y, z) a otro (x', y', z') de tal modo que se verifica

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = M^2(x^2 + y^2 + z^2)$$

siendo M la dilatación lineal de cualquier longitud. Puesto que la transformación lineal general de las x, y, z , en las x', y', z' contiene $3 \cdot 3 = 9$ coeficientes, y el primer miembro, después de la introducción de estas expresiones, pasa a ser una forma cuadrática de x, y, z con $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ términos, la identidad escrita representa cuando se deja arbitrario M , $6 - 1 = 5$ condiciones, y todas las sustituciones lineales que la satisfacen contienen aún $9 - 5 = 4$ parámetros arbitrarios (véase la consideración análoga, pág. 99).

Si una de estas sustituciones tiene su *determinante positivo*, representa, como dijimos (99) un giro del espacio alrededor del

origen de coordenadas seguido de una homotecia de razón $1:M$; si la transformación es de determinante negativo, la sustitución *corresponde a un movimiento de esta especie compuesto con una simetría del espacio*, dada por las relaciones $x'=-x$, $y'=-y$, $z'=-z$. Por otra parte, se puede demostrar que los determinantes sólo pueden tomar los dos valores $\pm M^3$.

Para expresar estas relaciones por medio de los cuaternios reduzcamos primeramente las indeterminadas q y q' a sus partes vectoriales:

$$q' = ix' + jy' + kz', \quad q = ix + jy + kz;$$

éstos son los vectores tridimensionales que, respectivamente, van del origen de coordenadas a los puntos antes y después de la transformación. Entonces se verifica que: *el movimiento general del espacio tridimensional se produce cuando, en las fórmulas antes expuestas, se toman p y π conjugados*, es decir, ponemos:

$$q' = p \cdot q \cdot \bar{p}$$

o sea

$$ix' + jy' + kz' = (d + ia + jb + kc)(ix + jy + kz)(d - ia - jb - kc) \quad [1]$$

Para demostrarlo, hay que comenzar por probar que la parte escalar del producto del segundo miembro desaparece, y, por consiguiente, que q' es, en efecto, un vector. Para ello, efectuaremos primero el producto de p y q según la regla de multiplicación de cuaternios y encontramos

$$q' = [-ax - by - cz + i(dx + bz - cy) + j(dy + cx - az) + k(dz + ay - bx)] [d - ia - jb - kc]$$

y aplicando de nuevo la regla de multiplicación, resulta, en efecto, para la parte escalar de q' el valor 0, y para sus tres vectores componentes las expresiones siguientes:

$$\left. \begin{aligned} x' &= (d^2 + a^2 - b^2 - c^2)x + 2(ab - cd)y + 2(ac + bd)z \\ y' &= 2(ab + cd)x + (d^2 - b^2 - c^2 - a^2)y + 2(bc - ad)z \\ z' &= 2(ac - db)x + 2(bc + ad)y + (d^2 + c^2 - a^2 - b^2)z \end{aligned} \right\} \quad [2]$$

Estas fórmulas representan efectivamente un giro seguido de una dilatación, lo cual se ve en seguida, formando la ecuación de tensores (pág. 97) correspondiente a [1]:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (d^2 + a^2 + b^2 + c^2) (x^2 + y^2 + z^2) (d^2 + a^2 + b^2 + c^2)$$

o sea

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = T^4(x^2 + y^2 + z^2)$$

donde $T = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ designa el tensor de p . Resulta así (pág. 101), que nuestra transformación es un movimiento de la naturaleza indicada, es decir, de torsión propiamente tal (giro seguido de una dilatación), si su determinante es positivo (en caso contrario, esta torsión debería componerse con una simetría); la dilatación lineal es en todo caso $M = T^2$. El determinante, como antes dijimos, sólo puede tomar los dos valores $\pm M^3 = \pm T^6$. Si consideramos la transformación para todos los valores posibles de los parámetros a, b, c, d que corresponden al mismo valor de T (necesariamente distinto de 0) el determinante tendrá *siempre* el valor $+T^6$, si lo tiene para *un* sistema particular de valores de a, b, c, d , pues como función continua de estos parámetros no puede pasar bruscamente al valor $-T^6$, sin pasar por todos los intermedios. Un sistema particular de esa especie es el $a = b = c = 0$,

$d = T$; el determinante de [2] es entonces, $\begin{vmatrix} d^2 & 0 & 0 \\ 0 & d^2 & 0 \\ 0 & 0 & d^2 \end{vmatrix} = d^6 = +T^6$.

Resulta, pues, siempre positivo el signo y, por consiguiente [1] es, realmente, *siempre un giro seguido de una dilatación*. Un movimiento de esta especie, compuesto con una simetría, se obtiene simplemente sin más que escribir $g' = p \cdot g \cdot p$, pues esto es precisamente la composición de la transformación anterior con la simetría $x' = -x, y' = -y, z' = -z$.

Veamos ahora que, recíprocamente, *toda* torsión está contenida en la forma [1] ó [2]. Se reconoce, desde luego, que esta fórmula, según el cálculo antes efectuado, contiene cuatro parámetros arbitrarios a, b, c y d , y para ver que, eligiendo convenientemente estos parámetros, se obtiene realmente la dilatación lineal $M = T^2$, así como *la posición del eje y el ángulo de giro*,

cualesquiera que sean, se pueden utilizar las siguientes fórmulas. Sean ξ , η , ζ los cosenos directores del eje de giro, entre los cuales existe la conocida relación

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad [3]$$

y designemos por ω el ángulo de giro (amplitud de la rotación). Entonces se verifican las relaciones:

$$d = T \cdot \cos \frac{\omega}{2}$$

$$a = T \cdot \xi \cdot \sin \frac{\omega}{2}, \quad b = T \cdot \eta \cdot \sin \frac{\omega}{2}, \quad c = T \cdot \zeta \cdot \sin \frac{\omega}{2} \quad [4]$$

que, teniendo en cuenta [3], cumplen por sí mismas la condición

$$d^2 + a^2 + b^2 + c^2 = T^2$$

y, evidentemente, dan valores de a , b , c , d correspondiente a todo sistema arbitrario dado de T , ξ , η , ζ .

Para *demostrar* ahora las ecuaciones [4], observemos primero que por su medio se deducen fácilmente los valores de ω , ξ , η , ζ una vez dados los de a , b , c , d y que con tales valores queda satisfecha la condición [3]; pues elevando al cuadrado las ecuaciones [4] y sumando, y teniendo en cuenta que T es el tensor de $p = d + ia + jb + kc$, resulta

$$1 = \cos^2 \frac{\omega}{2} + \sin^2 \frac{\omega}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$$

de cuya relación se deduce inmediatamente la [3]. Para la determinación de ξ , η , ζ bastan las ecuaciones siguientes, que se deducen de las [4]:

$$\frac{a}{\xi} = \frac{b}{\eta} = \frac{c}{\zeta}$$

que expresan que el punto (a, b, c) está en el eje de giro de la transformación; cosa que se puede comprobar fácilmente, sin más que poner en [2] $x=a$, $y=b$, $z=c$, con lo que se obtiene:

$$x' = (d^2 + a^2 + b^2 + c^2)a = T^2 \cdot a$$

$$y' = (d^2 + a^2 + b^2 + c^2)b = T^2 \cdot b$$

$$z' = (d^2 + a^2 + b^2 + c^2)c = T^2 \cdot c$$

es decir, que el punto (a, b, c) queda en la recta de unión con el origen, que es lo característico de todo punto del eje de rotación.

Nos falta ya sólo probar que *el ángulo ω definido por las relaciones [4] es realmente la amplitud de la rotación*. Esto exige, sin embargo, prolijas consideraciones, que aquí podemos omitir, indicando solamente que *nuestras fórmulas de transformación [2], para $T=1$ se cambian, en virtud de las [4], en las de Euler para el giro de un ángulo ω de un sistema de ejes coordenados alrededor de un eje (ξ, η, ζ)* . Puede hallarse esto más circunstanciadamente desarrollado en *Klein-Sommerfeld, Theorie des Kreisels, Heft 1, Leipzig 1897 (7, pág. 55 y sig.)*, donde se hace uso explícito de la teoría de los cuaternios o también en *Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, 5.ª edición, Leipzig 1871, página 187*.

Para terminar, escribiremos la expresión breve y cómoda que da el cálculo de cuaternios para la rotación de amplitud ω alrededor del eje ξ, η, ζ , unida a una dilatación T^2 , la cual se obtiene reemplazando en la relación [1] a, b, c y d por sus valores dados por las fórmulas [4]:

$$ix' + jy' + kz' = T^2 \left[\cos \frac{\omega}{2} + \text{sen} \frac{\omega}{2} (i\xi + j\eta + k\zeta) \right] \left[ix + jy + kz \right] \\ \left[\cos \frac{\omega}{2} - \text{sen} \frac{\omega}{2} (i\xi + j\eta + k\zeta) \right] \quad [5]$$

Así aparecen condensadas todas las fórmulas de la rotación de Euler en una forma que fácilmente se graba en la memoria: el vector $ix + jy + kz$ multiplica y es multiplicado por cuaternios conjugados de tensor 1, llamados **versores** («girador» en contraposición al tensor «dilatador») apareciendo además como factor escalar el valor absoluto de la dilatación.

Siguiendo nuestra marcha, vamos a ver ahora que esta fórmula, al pasar al caso de dos dimensiones expresa exactamente la conocida representación de una torsión del plano xy por medio del producto de dos números complejos. Para ello basta suponer en la [5] que el eje de giro es el eje de las z , es decir, $\xi = \eta = 0, \zeta = 1$ y resulta para $z = z' = 0$:

$$ix' + jy' = T^2 \left(\cos \frac{\omega}{2} + k \text{sen} \frac{\omega}{2} \right) (ix + jy) \left(\cos \frac{\omega}{2} - k \text{sen} \frac{\omega}{2} \right)$$

y efectuando las multiplicaciones indicadas.

$$\begin{aligned} ix' + jy' &= T^2 \left[(ix + jy) \cos \frac{\omega}{2} + (jx - iy) \operatorname{sen} \frac{\omega}{2} \right] \left[\cos \frac{\omega}{2} - k \operatorname{sen} \frac{\omega}{2} \right] = \\ &= T^2 \left[(ix + jy) \cos^2 \frac{\omega}{2} + 2(jx - iy) \operatorname{sen} \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2} - (ix + jy) \operatorname{sen}^2 \frac{\omega}{2} \right] = \\ &= T^2 (ix + jy) \cos \omega + (jx - iy) \operatorname{sen} \omega = T^2 (\cos \omega + k \operatorname{sen} \omega) (ix + jy) \end{aligned}$$

Multiplicando, ahora, los dos miembros de esta última igualdad por $-i$, obtenemos:

$$x' + ky' = T^2 (\cos \omega + k \operatorname{sen} \omega) (x + ky)$$

y esta es, en efecto, la fórmula de la multiplicación de dos números complejos ordinarios con su interpretación como giro de una amplitud ω seguido de una dilatación de magnitud T^2 , sin otra diferencia que la de aparecer k en lugar de la letra i que designa la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$.

Volvamos de nuevo al espacio de tres dimensiones, y veamos qué modificaciones deberá experimentar la fórmula [1] para que represente un *giro sin dilatación*; para ello sustituiremos x' , y' y z' por $x' \cdot T^2$, $y' \cdot T^2$ y $z' \cdot T^2$, y por consiguiente q' por $q' \cdot T^2$; y recordando que $p^{-1} = \frac{1}{p} = \frac{\bar{p}}{T^2}$ resulta como fórmula de la simple rotación:

$$ix' + jy' + kz' = p (ix + jy + kz) p^{-1} \quad [6]$$

que no es ninguna particularización si consideramos p como cuaternio de tensor 1:

$$p = \cos \frac{\omega}{2} + \operatorname{sen} \frac{\omega}{2} (i\xi + j\eta + k\zeta), \text{ de donde } \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1;$$

y, por lo tanto, se deduce la fórmula [6] de la [5] cuando en ésta se hace $T=1$. Bajo esta forma aparece la fórmula primeramente

en Cayley, año 1845 (1). Exactamente como antes para el espacio de cuatro dimensiones, se expresa en forma extremadamente sencilla la *composición de dos rotaciones*. Si tenemos una segunda rotación, de eje ξ', η', ζ y amplitud ω'

$$ix'' + jy'' + kz'' = p'(ix' + jy' + kz') p'^{-1}$$

de donde

$$p' = \cos \frac{\omega'}{2} + \text{sen} \frac{\omega'}{2} (i\xi' + j\eta' + k\zeta')$$

y se obtiene en seguida:

$$ix'' + jy'' + kz'' = p' \cdot p (ix + jy + kz) p^{-1} p'^{-1}$$

como expresión de la rotación resultante cuyo eje (ξ'', η'', ζ'') y amplitud ω'' , se deducen de

$$p'' = \cos \frac{\omega''}{2} + i(i\xi'' + j\eta'' + k\zeta'') \text{sen} \frac{\omega''}{2} = p' \cdot p.$$

Con ello, tenemos de nuevo una *sencilla y concisa expresión de las fórmulas bastante complicadas para la composición de dos rotaciones* y al mismo tiempo, por otra parte, puesto que todo cuaternio puede ser considerado como versor de una rotación salvo un factor real (su tensor) se tiene una *traducción geométrica sencilla de la multiplicación de cuaternios en la composición de rotaciones*; la *no conmutatividad de la multiplicación de cuaternios corresponde entonces a la conocida circunstancia de que en la composición de rotaciones alrededor de un punto, no puede, en general, cambiarse el orden de éstas sin que altere el resultado*.

Al lector que desee informarse más detalladamente sobre el desarrollo histórico de la interpretación expuesta y aplicaciones de los cuaternios, así como de la teoría de las rotaciones de un sistema coordinado, le recomendamos una de las más valiosas memorias de Cayley sobre Dinámica:

«*Report on the progress of the solution of certain special problems of Dynamics*» (2).

(1) On certain results relating to quaternions (Coll. pap. I, 1889, página 123).

(2) Collect. math. papers, vol. IX, pág. 55, 2.º y sig. (Cambridge, 1891).

Vamos a terminar con algunas *consideraciones generales sobre el valor y la extensión de los cuaternios*. Hay aquí que distinguir entre la propia *multiplicación de cuaternios* y el *cálculo general de cuaternios*. La primera es siempre algo *extremadamente útil* como se desprende de las precedentes explicaciones. El cálculo general, tal como Hamilton lo concibió, considera adiciones, multiplicaciones y divisiones de cuaternios en cualquier orden de sucesión; es decir, estudia el *Álgebra de los cuaternios* y si se agregan los procesos infinitos, se puede llegar hasta a una *teoría de funciones de cuaternios*; si bien, debido a la falta de la ley conmutativa, aparece todo de modo completamente distinto que en la teoría de las variables complejas ordinarias, pero puede asegurarse que *estas vastas concepciones generales de Hamilton no se han consolidado*, es decir, que entre ellas y otras disciplinas de la matemática y sus aplicaciones no se ha llegado a establecer el contacto y el intercambio de puntos de vista y conceptos y, por consiguiente, que no despiertan el general interés.

Ocurre, sin embargo, en la matemática como en la vida humana: al lado del pensamiento tranquilo y objetivo de la mayoría aparecen apasionados e individuales convencimientos; así los cuaternios no dejan de tener sus *partidarios entusiastas* y sus *apasionados adversarios*. Los primeros, que se encuentran principalmente en Inglaterra y América, cuentan desde hace doce años con el fin de propagar mejor sus ideas, con una *Liga mundial para el progreso de la teoría de los cuaternios*, cuyo actual presidente es *Sir Robert Ball* y que como institución internacional ha sido fundada por el japonés *Kimura*, que hizo sus estudios en América. Estos entusiastas se prometen obtener de un cultivo intensivo de los cuaternios grandes adelantos y aportación a la matemática. Frente a ellos hay adversarios, que no quieren ni oír hablar de los cuaternios y llegan hasta excluir la utilísimas multiplicación; parten de la idea de que todo el cálculo de cuaternios equivale, en último término, al cálculo con los cuatro componentes y que las unidades y el convenio relativo a su producto son un lujo completamente superfluo. Yo creo que uno y otro partido están igualmente apartados del justo término medio.

IV. Los números complejos en la enseñanza

Dejando ya la teoría de los cuaternios, vamos a cerrar este capítulo con algunas observaciones sobre el papel que desempeñan estos conceptos en la enseñanza. A nadie se le ocurre llevar a su grado secundario la teoría de los cuaternios, pero *siempre se habla en ella de los números complejos*, $x+iy$. Quizá no carezca de interés que en lugar de extensas explicaciones de cómo se practica esta enseñanza y cómo debiera practicarse, me refiera aquí a tres libros de épocas diferentes que reflejan bien *cómo se ha desarrollado históricamente esta enseñanza*.

Aparece, en primer término, un libro de Kästner, matemático que en la *segunda mitad del siglo XVIII* disfrutó de gran renombre en Gotinga. Entonces se cursaban todavía en la Universidad algunas cosas de matemáticas elementales, que más tarde, hacia el año treinta del siglo pasado, pasaron a la escuela, y, en consecuencia, explicó Kästner también lecciones de matemáticas populares a las cuales concurrían un gran número de profanos. Su libro, al que sirvieron de fundamento sus lecciones, se titula *Mathematische Anfangsgründe* (1), siendo de interés para nuestro asunto la 2.^a sección de la 3.^a parte: *Anfangsgründe der Analysis endliche Grössen*. Empieza en la página 20 la exposición de las cantidades imaginarias, poco más o menos con estas palabras: «Quien trata de hallar una raíz de índice par de una cantidad negativa, pretende un imposible; pues no existe ninguna cantidad negativa que sea potencia de exponente par». Esto es, en efecto, completamente correcto; pero, si seguimos leyendo, encontraremos en la página 34 este párrafo: «tales raíces se llaman imposibles o imaginarias», y sin que se preocupe más de justificar la cosa, opera tranquilamente con tales magnitudes como con los números ordinarios, a pesar de haber negado antes su existencia, como si el dar un nombre bastase para que, de pronto, pudiera utilizarse el absurdo. Como se ve, hay aquí todavía un reflejo de la concepción de Leibniz que consideraba los números imaginarios como algo enteramente sin sentido, pero que de un modo incomprensible conduce a resultados útiles.

Kästner escribía, además, de modo muy ameno, pues su nom-

(1) Tercera ed. Göttingen, 1794.

bre es también conocido en Literatura como epigramático. Así, para citar un ejemplo entre muchos, en la introducción de este tomo, se extiende al hablar del origen de la palabra Algebra, que, como indica el artículo *Al*, viene del árabe. Un algebrista sería, según Kästner, un hombre que *hace enteros* a los quebrados, y, por consiguiente, los trata como funciones racionales y los pone con un mismo denominador, etc.; primitivamente debió de aplicarse el nombre a los cirujanos que curan fracturas de huesos. Kästner cita a don Quijote que busca un algebrista para que junte y nuevamente encaje en su sitio las rotas costillas. Lo que no se sabe es si Cervantes empleó esta palabra conformándose al lenguaje de la época o si sólo la utilizó con fines satíricos.

Un segundo libro viene después de bastantes años, debido al profesor berlinés *M. Ohm*, *Versuch eines vollständig konsequenten Sytemes der Mathematik* (1). Es un libro de tendencia análoga al de Kästner y muy difundido en su tiempo. Ohm se coloca, sin embargo, ya mucho más próximo a los modernos puntos de vista, pues enuncia explícitamente el *principio de la ampliación del campo de números*, y dice que lo mismo que los números negativos, debe agregarse el símbolo $\sqrt{-1}$ a los números reales como un *nuevo ente*. La interpretación geométrica no aparece en el libro ni era conocida todavía de Ohm, pues la publicación del trabajo de Gauss, que la dió a conocer, no se realizó hasta 1831.

Citemos, por último, uno de los muchos libros de texto modernos más extendidos, *Aufgabensammlung* de *Bardey* (2). Aquí se coloca en primer término el *principio de extensión* del concepto de número, y después se expone también la *interpretación geométrica*. Este parece, en efecto, ser el punto de vista hoy general en la enseñanza, aun cuando en algunos sitios quede detenida la teoría en el grado precedente, y también creo yo que el modo más adecuado de tratar la cuestión en la enseñanza secundaria. Sin fatigar al alumno con exposiciones sistemáticas y, naturalmente, omitiendo explicaciones demasiado lógicas y abstractas,

(1) Nueve tomos. Berlín, 1828. Bd. I (Arithm. u. Algebra), pág. 276.

(2) Nueva edición publicada por *F. Pietsker* y *O. Prester* (5.ª ed. Leipzig, 1907), pág. 96 y siguientes.

pueden darse los números complejos como una ampliación del sistema conocido de números, evitando toda apariencia misteriosa, y sobre todo, acostumar al alumno a la interpretación geométrica e intuitiva en el plano complejo.

* * *

Hemos llegado con esto al final de la primera parte de nuestro curso, la dedicada a la Aritmética. Antes de pasar a consideraciones análogas sobre Algebra y el Análisis, agregaremos una ojeada histórica que proyectará nueva luz, tanto sobre la materia general de la enseñanza actual, como sobre lo que en ella quisiéramos mejorar.

INTERMEDIO

SOBRE EL MODERNO DESARROLLO Y LA CONSTRUCCION DE LA MATEMATICA

Permitan ustedes que parta de la observación de que en la *Historia del desarrollo de la Matemática* hasta el momento actual se pueden distinguir con toda precisión dos procesos diferentes, que tan pronto se desarrollan con absoluta separación como, sin perder su independencia, corren paralelos o, finalmente, mutuamente se entrecruzan. Es difícil precisar, en una frase gráfica, la diferencia a que me refiero porque ninguno de ambos se ajusta a las clasificaciones corrientes; pero comprenderán bien lo que digo fijándonos en un ejemplo, si les hago ver cómo se construyen los *capítulos elementales del sistema del Análisis*, atendiendo a cada uno de tales procesos.

Partiendo de uno que, para abreviar, llamaremos *proceso A*, resulta el siguiente sistema, que es hoy el usual en la enseñanza secundaria y en los tratados elementales:

1) A la cabeza aparece la *teoría formal de las ecuaciones*; por lo tanto, las *operaciones con funciones racionales enteras* y el estudio de los casos en los cuales *las ecuaciones algebraicas pueden ser resueltas por medio de radicales*.

2) Del estudio sistemático del concepto de potencia y sus inversos, se derivan los *logaritmos*, que tan ventajosos resultan en el cálculo numérico.

3) Mientras que hasta aquí los desarrollos analíticos se han mantenido apartados de la Geometría, ahora presta ésta sus recursos y con ello suministra *las primeras definiciones de una segunda clase de funciones trascendentes, las trigonométricas*, cuya teoría general se construye después como una *disciplina especial*.

4) Sigue en seguida el llamado «Análisis algebraico», que

enseña a *desarrollar en series infinitas las funciones más sencillas*; se consideran, entonces, la *fórmula del binomio generalizada*, la *función logarítmica* y su inversa la *función exponencial*, así como las *funciones trigonométricas*; también puede considerarse como perteneciente al mismo la *teoría general de las series infinitas y de las operaciones con ellas*. De aquí surgen las *sorprendentes conexiones entre las llamadas funciones elementales transcendentales*, y en particular la célebre fórmula de Euler :

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x.$$

Estas relaciones parecen tanto más notables, cuanto que las funciones que enlazan habían sido definidas antes en campos completamente diferentes de la matemática.

5) Fuera ya de los cuadros de la enseñanza secundaria de la matemática, se une en esta construcción, como continuación natural, la *Teoría de Weierstrass de las funciones de variable compleja*, que parte de las *series potenciales*.

Frente a este proceso, pongamos también en reducida síntesis el siguiente esquema del segundo *proceso B*; en él domina, en general, el *pensamiento de la Geometría analítica* que reclama una *fusión de los conceptos de número y espacio*. Se empieza entonces :

1) Con la *representación gráfica de las funciones más sencillas*, de los polinomios y funciones racionales de una sola variable. Los puntos de intersección de las curvas así obtenidas con el eje de abscisas ponen en evidencia los *ceros del polinomio*; y a esto se une, de modo natural, la *teoría de la resolución numérica de las ecuaciones por medio de aproximaciones*.

2) Las *representaciones geométricas de curvas* son el *origen natural intuitivo de los conceptos de cociente diferencial y de integral*; al primero conduce la *pendiente de la curva*; al segundo el *área de la superficie limitada por la curva, el eje de abscisas y las ordenadas de dos puntos de aquella*.

3) En todos los casos en que el *proceso de integración* (cuadraturas, en el sentido estricto de la palabra) no se pueda realizar explícitamente por medio de funciones racionales, da *origen a nuevas funciones* que de esta manera se introducen de un modo

absolutamente natural. Así la cuadratura de la hipérbola define el logaritmo:

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \log x,$$

en tanto que la cuadratura del círculo se reduce fácilmente a la función inversa del seno:

$$\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen } x$$

Sabido es que siguiendo el mismo proceso se llega a nuevas y más complicadas funciones, en particular a las funciones elípticas.

4) *El desarrollo en serie de todas las funciones así obtenidas se realiza siguiendo un método general, el conocido por la fórmula de Taylor.*

5) Como una prolongación de este método aparece después la *teoría de funciones de variable compleja, de Cauchy-Riemann*; la cual se basa sobre las *ecuaciones diferenciales* llamadas de *Cauchy-Riemann* o sobre la *integral de Cauchy*.

Si tratáramos de sintetizar el resultado de esta rápida ojeada en pocas y precisas palabras, podría, quizás, decirse que *en el proceso A la base es una concepción particularista de la ciencia, que trata de descomponer todo el campo de la misma en una serie de regiones bien delimitadas, en cada una de las cuales se opera evitando todo lo posible acudir a los recursos que pueden obtenerse de las regiones próximas; su ideal es el de una bella y lógica cristalización de cada una de estas regiones en un cuerpo de doctrina aislado.*

Contrariamente a esto, atribuye el partidario de B capital importancia a un enlace orgánico de las diferentes regiones de la ciencia y a los numerosos recursos que mutuamente se prestan unas y otras, y prefiere, según esto, los métodos que le permiten abarcar, desde un punto de vista único, la comprensión simultánea de varias regiones. Su ideal es la **concepción de toda la ciencia matemática como un todo.**

No se puede poner en duda cuál de las dos orientaciones tie-

ne mayor vida propia y mejor puede adaptarse al discípulo que no esté específicamente dotado para la abstracción matemática. Para cerciorarnos bien de esto, consideremos solamente el *ejemplo de las funciones e^x y $\text{sen } x$* , acerca del cual hemos de hablar más adelante y precisamente en este sentido. En el sistema A (que es el que, por desgracia se sigue casi exclusivamente en la escuela) aparecen como completamente heterogéneas ambas funciones: e^x junto con el *logaritmo* se presentan como un *cómodo recurso auxiliar para el cálculo numérico* y $\text{sen } x$ aparece en la Geometría del triángulo. ¿Cómo va a comprenderse así que dichas funciones estén tan íntima y sencillamente relacionadas y más aún, que en las más diversas regiones, que no tienen que ver lo más mínimo con la técnica del cálculo numérico ni con la Geometría, se presenten como expresión natural de las leyes que allí rigen? Cuán lejos van las posibilidades de sus aplicaciones, lo muestran, de una parte, los nombres de función *del interés o ley del crecimiento orgánico* que se atribuyen a e^x , y de otra, que en todo cuanto se refiere a vibraciones, se reserva al $\text{sen } x$ el papel central. En cambio, *en el sistema B esto resulta completamente natural y conforme a la significación acordada desde el principio a las funciones*. Aquí e^x y $\text{sen } x$ tiene el mismo origen, la cuadratura de curvas sencillas, y partiendo de ellas se llega en seguida, como más adelante veremos, a las *ecuaciones diferenciales de los tipos más sencillos* $\frac{de^x}{dx} = e^x$, $\frac{d^2 \text{sen } x}{dx^2} = -\text{sen } x$, que sirven de base a todas aquellas aplicaciones.

Para la más completa inteligencia del desarrollo de la matemática debemos observar todavía una *tercera fase*, que frecuentemente desempeña un papel de gran importancia al lado y dentro de los mismos sistemas A y B. Nos referimos con esto a lo que se designa con el nombre de *algoritmo*—palabra derivada del nombre de un matemático árabe—que, en último término, es *todo proceso formal de cálculo*, en particular el *cálculo literal*. Repetidamente hemos señalado el influjo que en el desarrollo de la ciencia ha tenido el procedimiento algorítmico como una *fuerza impulsiva interna de las fórmulas* independiente de la intención y de los conocimientos del matemático y aun, muy frecuentemente, contraria a sus deseos.

También en los comienzos del cálculo infinitesimal, como veremos, el algoritmo ha originado nuevos conceptos y operaciones, a veces antes de que pudiera justificarse su admisión. Aun en la Matemática superior pueden estos procesos algorítmicos reportar alguna utilidad, y realmente la han reportado, de tal modo, que muy bien pueden considerarse como los *cimientos del edificio matemático*. Equivale, por lo tanto, a despreciar las enseñanzas de la historia, estimar, como a veces se hace ahora, estos métodos como simples desarrollos formales indignos de atención seria.

Parece conveniente apreciar mejor el contraste entre estas diferentes direcciones de la obra matemática acudiendo a la historia de la matemática, siquiera hayamos de limitarnos a mencionar los rasgos más salientes, porque ello bastará para ver la diferencia esencial que existe entre los procesos A y B dentro de todo el campo de la matemática de modo más claro que en lo que hemos dicho, refiriéndonos tan sólo al Análisis.

Empezando por los *antiguos griegos*, encontramos una *completa separación entre la matemática pura y la aplicada*, ya establecida por Platón y Aristóteles. A la matemática pura pertenecía, ante todo, la conocida construcción euclídea de la Geometría; en la aplicada se atendía especialmente al cálculo numérico que forma la llamada Logística ($\lambda\sigma\gamma\sigma$ = número en general, véase pág. 45). Indudablemente, se concedía a la Logística valor muy escaso; prejuicio que, como se sabe, aun se tiene hoy, sobre todo entre las gentes que no saben calcular numéricamente. Esta exigua importancia dada a la Logística, explica que se la estudiase junto con la Trigonometría y el arte de la medición práctica de las magnitudes, que desde antiguo ha parecido al hombre, cosa vulgar, no distinguida; algo parece, sin embargo, que se rehabilitó, al reconocer que sin ella no podía existir la Astronomía, ciencia que, a pesar de sus relaciones con la Geodesia, ha sido siempre mirada como una de las disciplinas más elevadas.

Estas pocas observaciones bastan para advertir que la modalidad científica de los griegos, con su rigurosa separación de las diferentes ramas de la Ciencia, que constituía a cada una de éstas en un lógico y rígido sistema, *pertenece por entero al proceso evolutivo A.. No obstante no fueron extrañas a los griegos ten-*

dencias y métodos que encajan en el sentido B, que parecen haber desempeñado importante papel para fines eurísticos y para una primera comunicación de sus investigaciones; siquiera les pareciese indispensable para la exposición definitiva la forma *A*, como lo demuestra especialmente la memoria de Arquímedes recientemente descubierta (1), en la cual expone sus cálculos de volúmenes de un modo absolutamente moderno y atrayente.

Al lado de los griegos trabajaron con fruto en la antigüedad los **indios**, a los cuales debemos nuestro sistema de numeración decimal, y, más tarde, los **árabes**, como sus divulgadores; éstos mismos fueron los primeros iniciadores del cálculo literal. Tales progresos entran de lleno en el proceso algorítmico *C*.

Pasemos, ahora, al desarrollo de la Matemática en la edad moderna. Hacia el año 1500, poco más o menos, podemos fijar el punto de partida del renacimiento matemático, el cual ha traído una considerable serie de grandes descubrimientos. Pueden citarse como ejemplo la fórmula de resolución de la ecuación cúbica (fórmula cardánica), contenida en el *Ars Magna* de Cardano, publicada en Nuremberg en el año 1545; obra de grandísimo valor que se sale del marco de la antigua matemática y puede considerarse como el germen del Álgebra moderna. Es de notar que la obra no es un mérito exclusivo de Cardano, pues tanto la fórmula que lleva su nombre como otras incluidas en aquélla, son tomadas de otros autores.

Desde 1550, aparece en primera línea el cálculo trigonométrico; las necesidades de la *Astronomía*, en la cual sólo he de citar el nombre de Copérnico, obligaron a publicar las primeras grandes tablas trigonométricas, a las cuales se unió hacia el año 1600 la exposición de logaritmos. Las primeras tablas de logaritmos que el escocés Napier (*Neper*) publicó en 1614, contienen precisamente sólo los logaritmos de las funciones trigonométricas. Se ve claramente que todo el desarrollo matemático en estos 100 años corresponde exactamente al proceso *A*.

Vengamos, ahora, a la edad moderna propiamente dicha, que principia en el siglo XVII. Aquí aparece en todo la orientación *B*. En 1637 aparece la *Geometría Analítica* de Descartes que crea el

(1) Véase Heiberg y Zeuthen. Eine neue Schrift des Archimedes, Leipzig 1907, publicado en «Bibliotheca matemática», serie 3.^a, tomo VIII.

enlace, fundamental para toda la Matemática, entre el número y el espacio (2). Poco después, aparecen *los dos grandes problemas del siglo XVII*, el *problema de las tangentes* y el de las *cuadraturas*, es decir, *los problemas fundamentales del cálculo diferencial y del integral*, respectivamente. Para la constitución del cálculo diferencial e integral propiamente dichos, sólo faltaba ya el conocimiento de que ambos problemas se hallan estrictamente ligados, de tal modo que *el uno es el recíproco del otro*; éste parece ser el germen de los grandes progresos realizados al final de este siglo XVII. Antes, sin embargo, en el transcurso del mismo siglo nació también la teoría de las *series infinitas* y, en particular, de las *series potenciales*; pero no como una disciplina independiente en el sentido del Análisis algebraico actual, sino íntimamente unida al problema de las cuadraturas. *Nicolás Mercator* (latiniización del apellido alemán *Kaufmann*, años 1620-1687) que nada tiene que ver con el inventor, un siglo antes, de la llamada proyección de Mercator, abrió aquí el camino; él tuvo la audaz idea de obtener el *desarrollo en serie* de $\log(1+x)$ efectuando la división expresada por el quebrado $\frac{1}{1+x}$ e *integrando término a término* la serie originada:

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x (1-x+x^2-\dots) dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Este es exactamente el contenido de su razonamiento; aun cuando, naturalmente, no utilizase nuestros sencillos signos \int , dx , etc., y emplease, por el contrario, un lenguaje mucho más complicado.

De este proceso se adueñó pronto, en 1600, *I. Newton* (1642-1726), que había dado *la serie del binomio general*; claro es que procedió por analogía con el conocido y sencillísimo caso del exponente entero, sin tener ninguna demostración rigurosa de esta serie, y aun desconociendo los límites de validez de la misma, lo cual encaja de lleno dentro del *proceso algorítmico C*. Aplicando Newton esta serie al caso concreto $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ obtiene,

(2) Una nueva edición cómodamente manejable de esta obra, se publicó en París el año 1886. (*R. Descartes, La Géométrie.*)

procediendo como Mercator, la serie para $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \text{arc sen } x$; y por una hábil *inversión de esta serie*, así como de la del $\log x$, encuentra las series para $\text{sen } x$ y e^x . Como final de esta cadena de descubrimientos aparece el *método general para el desarrollo de funciones en serie potencial* dado por Taylor (1685-1731) el año 1714.

La formación del cálculo infinitesimal propiamente dicho, realizada al final del siglo XVII, a que brevemente vamos a referirnos, débese, como es sabido, a *E. W. Leibniz* (1646-1716), y *Newton*. En éste aparece la idea fundamental de la *fluación*: dos variables x e y consideradas como funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ del tiempo, *fluyen*, por decirlo así, mientras transcurre el tiempo; en consecuencia, llamaba Newton a las variables *fluantes*, y lo que nosotros llamamos cociente diferencial, él lo designaba como *fluación* \dot{x} , \dot{y} ; todo lo cual, como se ve, estaba basado en la intuición.

Algo semejante es la exposición de *Leibniz*, cuya primera publicación apareció en el año 1684. Leibniz señala como su más importante descubrimiento, que llama *principio de la continuidad en todo fenómeno natural*, la proposición: *Natura non facit saltum*; y sobre esta concepción de la naturaleza apoya sus desarrollos matemáticos; estamos, pues, nuevamente ante un rasgo típico del sistema B. Por lo demás, adviértese en Leibniz una *muy marcada influencia del Algoritmo C*; a él debemos las valiosas notaciones dx y $\int f(x) dx$.

En conjunto, se deduce como resultado de esta rápida ojeada, que *los grandes descubrimientos del siglo XVII pertenecen casi exclusivamente al proceso evolutivo B*.

En el siglo XVIII continúa este período de descubrimientos, siguiendo *la misma dirección*; como nombres, los más esclarecidos de esta época, hay que citar *L. Euler* (1707-1783) y *I. L. Lagrange* (1736-1813).

Se construyen en este siglo, no hablando, para abreviar, sino de lo más saliente: la *teoría de las ecuaciones diferenciales en su sentido más general, incluyendo el cálculo de variaciones*, así como la *Geometría analítica* y la *Mecánica analítica*.

En todas partes se echa de ver un progreso extraordinario como ocurrió en la Geografía, después del descubrimiento de América, que primero fueron explorados y recorridos en todas

direcciones los nuevos países sin pararse en determinar exactamente la situación y límites de los mismos, hasta el punto de tenerse en los primeros tiempos falsas ideas sobre su situación general (Colón mismo creyó, al principio, haber hallado el oeste de Asia), así también en los dominios recientemente conquistados en el continente del cálculo infinitesimal se estaba muy lejos de una orientación satisfactoriamente lógica, y hasta, al examinar sus relaciones con las disciplinas bien conocidas de antiguo, se daban frecuentes errores y francas contradicciones, teniéndose al Cálculo infinitesimal por algo transcendente y *misterioso* que no consentía absolutamente ningún análisis lógico. Cuán poco estable y seguro era el piso en que se movían, se dejó ver bien claramente en cuanto se quisieron exponer al alcance de todos en libros didácticos estas nuevas adquisiciones; entonces se vió en seguida que la orientación B, que hasta entonces había prevalecido, no podía seguir siendo utilizada. Euler fué quien primero la abandonó. No es seguramente que tuviera Euler ningún reparo mental contra el Cálculo infinitesimal; pero ofrecía, según su opinión, tantas dificultades y dudas a los principiantes, que examinado desde este punto de vista, que pudiéramos llamar pedagógico, consideró conveniente hacerle preceder en su obra: *Introductio in analysis infinitorum*, año 1748, de aquellas disciplinas que hoy llamamos *Análisis algebraico*, en donde exponía, en particular, la teoría de las series infinitas y de otros procesos indefinidos del Cálculo; elementos que ulteriormente han servido de base y fundamento al Cálculo infinitesimal.

Un camino mucho más radical abrió Lagrange, cincuenta años más tarde, en su *Theorie des fonctions analytiques* del año 1797; acalló sus escrúpulos sobre la fundamentación que en su época se hacía del Cálculo infinitesimal, no reconociendo en él el carácter de una disciplina matemática, dejándolo subsistir solamente como un conjunto de reglas formales aplicables a ciertas funciones especiales. Consideraba *exclusivamente aquellas funciones definidas por su desarrollo en serie potencial*:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

y las llamaba *funciones analíticas*, queriendo expresar con ello, que son las que en Análisis pueden aparecer y con las cua-

les se puede trabajar e investigar. *La derivada de esta $f(x)$ está entonces definida de un modo puramente formal por una segunda serie potencial*, como veremos más tarde, y con la íntima relación de ambas series se ocupa el Cálculo diferencial e integral. Con esta limitación a consideraciones puramente formales se llegaron a desvanecer por aquel tiempo toda una serie de dificultades que de otro modo no podían ser orilladas.

Claramente se ve, que *esta orientación de Euler y de Lagrange pertenecen completamente al proceso A; pues el desarrollo intuitivo y genético viene reemplazado por un círculo de pensamientos lógicamente cerrado en sí mismo*. Estas dos obras han ejercido una influencia enorme en la enseñanza secundaria, y cuando hoy se explican en ella series infinitas o resuelven ecuaciones por desarrollos en serie según el *método de coeficientes indeterminados*, desechando los recursos del Cálculo diferencial e integral, *aparece influida por las citadas obras de Euler y Lagrange*.

En el siglo XIX, al cual venimos ahora, se tiende a buscar una base sólida al Análisis superior por medio de los criterios de convergencia, de los cuales nadie se había preocupado antes. En el siglo XVIII dominaba aquí un estado «paradisíaco», en el que no se cuidaban de distinguir la convergencia, ni la divergencia, y aun en el mismo Euler, en su libro ya citado, aparecen series convergentes y divergentes en amigable consorcio. Pronto se dan, al principio del siglo XIX, por Gauss (1777-1855) y Abel (1802-1829), las primeras investigaciones precisas sobre la convergencia de las series, y Cauchy (1879-1857) desarrolla en libros y conferencias, en el año 1820, la primera fundamentación exacta del cálculo infinitesimal en el sentido moderno.

Cauchy no sólo da la *definición rigurosa de la derivada y de la integral como límites de cocientes y sumas infinitas*, respectivamente, como ya antes se había hecho ocasionalmente, sino que por primera vez construye sobre ellas, mediante el famoso *teorema de la media*, una *sistematización lógica del cálculo infinitesimal*; más tarde volveremos a tratar con más detalle este asunto.

Estas teorías están dentro de la orientación A, puesto que han logrado ordenar lógicamente el material de doctrina de esta dis-

ciplina con entera independencia de las demás; pero *por esto no han alcanzado ninguna influencia sobre la enseñanza*, aunque son muy apropiadas para desvanecer los antiguos prejuicios que se abrigan contra el Cálculo diferencial e integral.

Sobre el *ulterior desarrollo de la Matemática en el siglo XIX*, vamos a circunscribirnos a lo más esencial. Son de citar, en primer término, algunos progresos alcanzados en la *orientación B: Geometría proyectiva, Física matemática y Teoría de funciones de variable compleja según Cauchy y Riemann*. Los iniciadores de estas tres grandes regiones fueron primeramente los franceses. Y séame permitida en este punto una pequeña digresión sobre el *estilo de la exposición matemática*.

En Euclides aparece todo cristalizado bajo el siguiente esquema: «hipótesis, tesis y demostración», apareciendo a veces la «determinación» (limitaciones de la región dentro de la cual son válidas las consideraciones expuestas). Pudiera creerse que la exposición de la matemática no puede salirse de este marco; pero precisamente en el período que estamos considerando se forma, especialmente entre los franceses, una nueva *forma artística de exposición matemática*, la cual aparece integrada por una serie de *deducciones ingeniosamente eslabonadas*; las obras de Monge y para citar obras modernas, el «Traité d'Analyse», de Picard, se leen con el mismo encanto que una novela de magnífico estilo y de atrayente argumento: *Este estilo parece apropiado a la orientación B; en cambio, la exposición euclidiana se acomoda mejor al proceso A*.

Entre los alemanes, que han aportado grandes descubrimientos en las regiones ya mencionadas, son de citar: *Jacobi* (1804-1854) y *Riemann* (1826-1866), y en tiempos más modernos podemos agregar los nombres de *Clebsch* (1833-1872) y del noruego *Sophus Lie* (1842-1899); todos los cuales trabajaron especialmente en la *orientación B*, y sólo de vez en cuando se dejan percibir en ellos algunas consideraciones desenvueltas bajo forma algorítmica.

En 1860 empieza *Weierstrass* sus lecciones en la Universidad de Berlín y con él surge de nuevo aquel método de exposición que simbolizamos por la letra *A*, como se revela claramente en su *Teoría de las funciones de variable compleja*, que yo mismo

he explicado en el sentido *A*. Igualmente pertenecen al tipo *A* las modernas investigaciones sobre los axiomas de la Geometría; trátase aquí de investigaciones de índole completamente euclidiana que hasta en su exposición se aproximan bastante al mencionado molde.

Con esto ponemos punto final a esta breve ojeada histórica, de cuyos resultados dedúcese la consecuencia de que *en los últimos siglos de actividad matemática que registra la historia, las dos direcciones fundamentales del pensamiento matemático se han mostrado como igualmente fecundas; actuando alternativamente, y muchas veces simultáneamente, hicieron surgir precisamente de esta conjunción los más grandes progresos que la matemática registra.*

La matemática presentará un desarrollo armónico en todas direcciones, siempre que *ninguna de las dos orientaciones ya señaladas sea preterida o despreciada*. Cada matemático debe, pues, trabajar en la dirección que le señalan sus dotes y su idiosincrasia intelectual.

En la enseñanza secundaria se encuentra, desgraciadamente, predominando desde hace largo tiempo la dirección *A*. Todo movimiento de reforma que se pueda mirar como saludable debe dar una entrada más amplia al sistema *B*. Con ello quiero expresar la conveniencia de que vaya penetrándose la enseñanza del espíritu que encarna el proceso genético, de que se acentúe con más relieve la intuición espacial como tal y, en especial, para dar anticipadamente el concepto de función con la fusión de los conceptos espacio y número. Para servir esta tendencia he dado estas conferencias, y con tanta más razón cuanto que libros elementales, como los que aquí frecuentemente hemos comentado de Weber-Wellstein, Tropske, M. Simon, casi exclusivamente presentan la orientación *A*. Yo he hecho ver este contraste ya en la introducción de estas conferencias.